Σπύρος Ευστ. Τζαμαρίας

Εισαγωγή σε Μεθόδους Ανάλυσης Πειραματικών Δεδομένων

Ο μόνος Κριτής της Επιστημονικής Αλήθειας είναι το Πείραμα

- Πειραματικός σχεδιασμός
- Οργανολογία
- Διεξαγωγή μετρήσεων
- Ανάλυση πειραματικών δεδομένων
- . . .

Σύγκριση
της Θεωρητικής Πρόβλεψης
με το Πειραματικό
Αποτέλεσμα

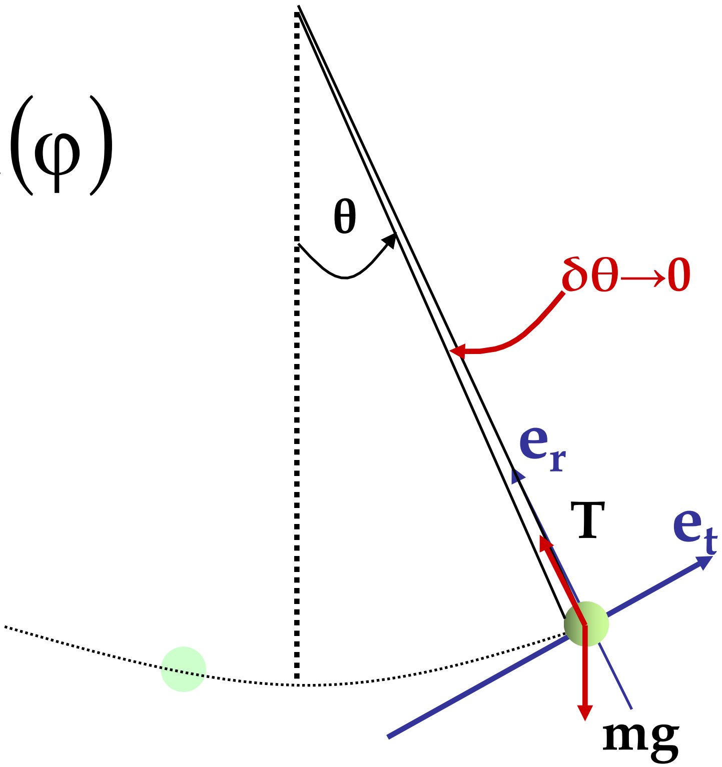
Επαλήθευση της Θεωρίας ή
Μετεξέλιξη

Παράδειγμα Εργασίας: Το μαθηματικό εκκρεμές

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad , \quad \theta(t=0) = \theta_0 \cdot \sin(\varphi)$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$



Παράδειγμα Εργασίας: Το μαθηματικό εκκρεμές

Συνεπώς: Για μικρές γωνιακές εκτροπές ($\theta \leq \theta_0 \rightarrow 0$) το εκρεμές εκτελεί αρμονική ταλάντωση με περίοδο:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Επιπλέον: Μετρώντας την περίοδο ταλάντωσης, T, ενός μαθηματικού εκκρεμούς, μήκους νήματος L,υπολογίζουμε την επιτάχυνση βαρύτητας ως:

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot L}{T^2}$$

Παράδειγμα Εργασίας: Το μαθηματικό εκκρεμές

Πειραματικός Σχεδιασμός

- **Θα μετρήσουμε την περίοδο ταλάντωσης , T, του απλού εκκρεμούς (την διάρκεια μίας πλήρους ταλάντωσης) για διαφορετικά μήκη του νήματος.**

- **Θα ελέγξουμε την αλήθεια της σχέσης:** $$\mathbf{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}}$$

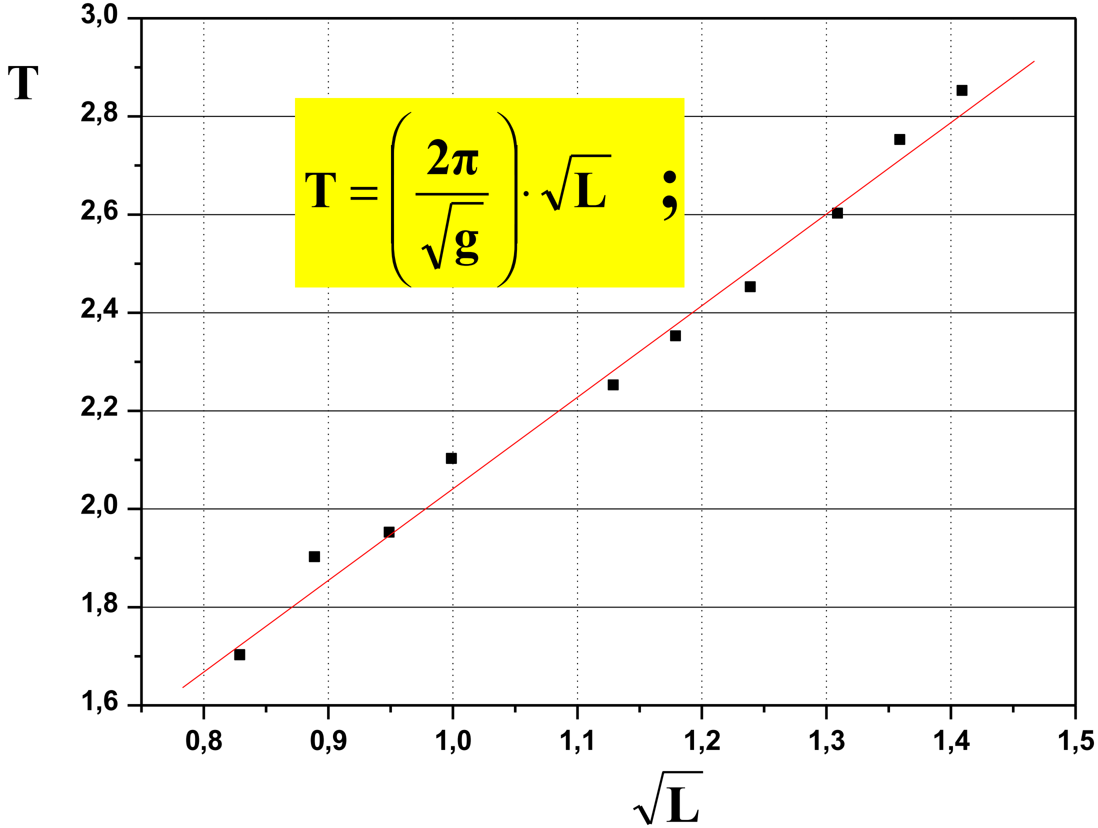
$$\mathbf{T = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right) \cdot \sqrt{L}}$$

$$\mathbf{y = a \cdot x}$$

Παράδειγμα Εργασίας: Το μαθηματικό εκκρεμές

Εκτελέσαμε τις μετρήσεις του Πίνακα 1

L (m)	T (sec)	$\sqrt{L}$
0.70	1.70	0.83
0.80	1.90	0.89
0.90	1.95	0.95
1.00	2.10	1.00
1.30	2.25	1.13
1.40	2.35	1.18
1.55	2.45	1.24
1.71	2.60	1.31
1.85	2.75	1.36
2.00	2.85	1.41



$$T = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right) \cdot \sqrt{L} \quad ;$$

Προσεγγιστική Περιγραφή των Φυσικών Φαινομένων ;

Στατιστικός Χαρακτήρας των Μετρήσεων

Εκτελέσαμε εκατό φορές την μέτρηση της διάρκειας μιάς πλήρους ταλάντωσης, κρατώντας το μήκος του νήματος σταθερό.
(οι χρόνοι σε sec)

2.25	2.20	2.50	2.30	2.20	2.50	2.40	2.40	2.30	2.35	2.40	2.40	2.35	2.25	2.50	2.30	2.40	2.40	2.10	2.35
2.45	2.40	2.45	2.35	2.25	2.25	2.15	2.35	2.40	2.45	2.35	2.25	2.40	2.50	2.35	2.55	2.25	2.30	2.10	2.30
2.25	2.40	2.35	2.35	2.20	2.35	2.55	2.35	2.40	2.30	2.40	2.30	2.40	2.45	2.35	2.25	2.40	2.15	2.50	2.35
2.30	2.35	2.35	2.60	2.35	2.35	2.35	2.35	2.50	2.45	2.35	2.35	2.45	2.30	2.50	2.10	2.40	2.30	2.40	2.25
2.35	2.25	2.35	2.35	2.35	2.30	2.40	2.40	2.30	2.35	2.40	2.35	2.55	2.40	2.40	2.25	2.50	2.15	2.30	2.30
2.40	2.40	2.45	2.15	2.45	2.10	2.45	2.50	2.30	2.50	2.20	2.35	2.35	2.40	2.20	2.40	2.35	2.50	2.35	2.15
2.25	2.35	2.25	2.25	2.40	2.35	2.45	2.45	2.35	2.40	2.55	2.20	2.30	2.40	2.35	2.40	2.20	2.20	2.40	2.30
2.45	2.15	2.35	2.40	2.20	2.35	2.35	2.45	2.40	2.20	2.35	2.45	2.50	2.35	2.50	2.30	2.50	2.30	2.35	2.40
2.40	2.30	2.50	2.50	2.40	2.30	2.40	2.35	2.40	2.50	2.35	2.30	2.25	2.35	2.45	2.30	2.20	2.35	2.30	2.50
2.25	2.45	2.25	2.20	2.40	2.40	2.15	2.20	2.20	2.40	2.35	2.45	2.50	2.40	2.40	2.45	2.30	2.40	2.15	2.40

Θα παραστήσουμε την συχνότητα εμφάνισης των μετρήσεων σε ιστόγραμμα

- **επιλέγουμε το ελάχιστο και το μέγιστο (2.10 – 2.60)**
- **Επιλέγουμε τον αριθμό ιστών -bins (π.χ. 5)**

[2.10,2.20) [2.20,2.30) [2.30,2.40) [2.40,2.50) [2.50,2.60]

Ένας ιστός (bin)

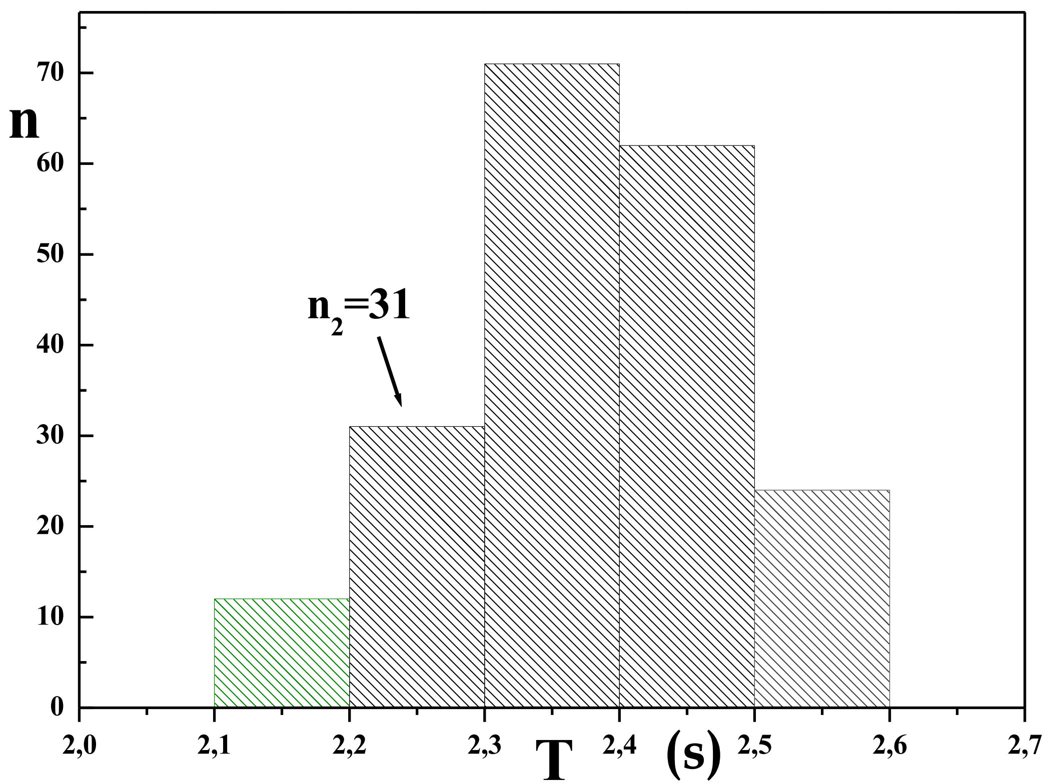
(οι χρόνοι σε sec)

2.25	2.20	2.50	2.30	2.20	2.50	2.40	2.40	2.30	2.35	2.40	2.40	2.35	2.25	2.50	2.30	2.40	2.40	2.10	2.35
2.45	2.40	2.45	2.35	2.25	2.25	2.15	2.35	2.40	2.45	2.35	2.25	2.40	2.50	2.35	2.55	2.25	2.30	2.10	2.30
2.25	2.40	2.35	2.35	2.20	2.35	2.55	2.35	2.40	2.30	2.40	2.30	2.40	2.45	2.35	2.25	2.40	2.15	2.50	2.35
2.30	2.35	2.35	2.60	2.35	2.35	2.35	2.35	2.50	2.45	2.35	2.35	2.45	2.30	2.50	2.10	2.40	2.30	2.40	2.25
2.35	2.25	2.35	2.35	2.35	2.30	2.40	2.40	2.30	2.35	2.40	2.35	2.55	2.40	2.40	2.25	2.50	2.15	2.30	2.30
2.40	2.40	2.45	2.15	2.45	2.10	2.45	2.50	2.30	2.50	2.20	2.35	2.35	2.40	2.20	2.40	2.35	2.50	2.35	2.15
2.25	2.35	2.25	2.25	2.40	2.35	2.45	2.45	2.35	2.40	2.55	2.20	2.30	2.40	2.35	2.40	2.20	2.20	2.40	2.30
2.45	2.15	2.35	2.40	2.20	2.35	2.35	2.45	2.40	2.20	2.35	2.45	2.50	2.35	2.50	2.30	2.50	2.30	2.35	2.40
2.40	2.30	2.50	2.50	2.40	2.30	2.40	2.35	2.40	2.50	2.35	2.30	2.25	2.35	2.45	2.30	2.20	2.35	2.30	2.50
2.25	2.45	2.25	2.20	2.40	2.40	2.15	2.20	2.20	2.40	2.35	2.45	2.50	2.40	2.40	2.45	2.30	2.40	2.15	2.40

[2.20,2.30)

Οι μετρήσεις σε ιστόγραμμα

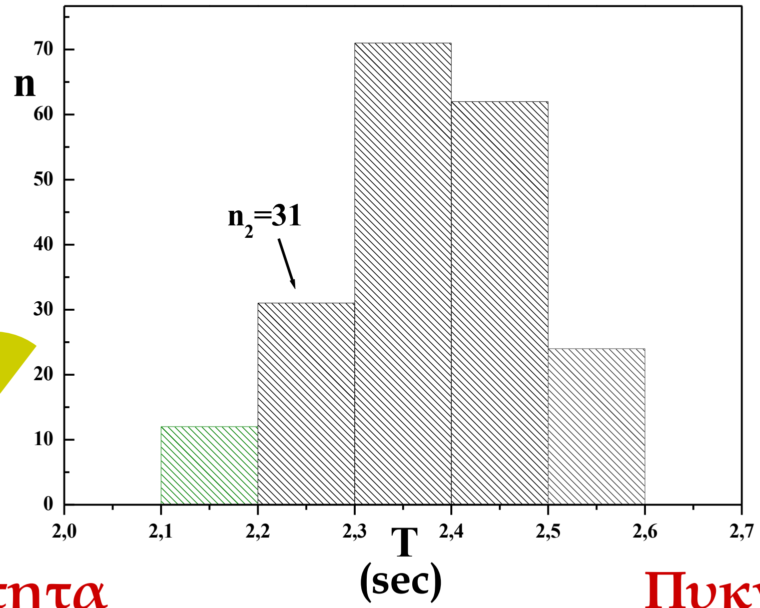
2.25	2.20	2.50	2.30	2.20	2.50	2.40	2.40	2.30	2.35	2.40	2.40	2.35	2.25	2.50	2.30	2.40	2.40	2.10	2.35
2.45	2.40	2.45	2.35	2.25	2.25	2.15	2.35	2.40	2.45	2.35	2.25	2.40	2.50	2.35	2.55	2.25	2.30	2.10	2.30
2.25	2.40	2.35	2.35	2.20	2.35	2.55	2.35	2.40	2.30	2.40	2.30	2.40	2.45	2.35	2.25	2.40	2.15	2.50	2.35
2.30	2.35	2.35	2.60	2.35	2.35	2.35	2.35	2.50	2.45	2.35	2.35	2.45	2.30	2.50	2.10	2.40	2.30	2.40	2.25
2.35	2.25	2.35	2.35	2.35	2.30	2.40	2.40	2.30	2.35	2.40	2.35	2.55	2.40	2.40	2.25	2.50	2.15	2.30	2.30
2.40	2.40	2.45	2.15	2.45	2.10	2.45	2.50	2.30	2.50	2.20	2.35	2.35	2.40	2.20	2.40	2.35	2.50	2.35	2.15
2.25	2.35	2.25	2.25	2.40	2.35	2.45	2.45	2.35	2.40	2.55	2.20	2.30	2.40	2.35	2.40	2.20	2.20	2.40	2.30
2.45	2.15	2.35	2.40	2.20	2.35	2.35	2.45	2.40	2.20	2.35	2.45	2.50	2.35	2.50	2.30	2.50	2.30	2.35	2.40
2.40	2.30	2.50	2.50	2.40	2.30	2.40	2.35	2.40	2.50	2.35	2.30	2.25	2.35	2.45	2.30	2.20	2.35	2.30	2.50
2.25	2.45	2.25	2.20	2.40	2.40	2.15	2.20	2.20	2.40	2.35	2.45	2.50	2.40	2.40	2.45	2.30	2.40	2.15	2.40



$$N = \sum_{i=1}^{5} n_i$$

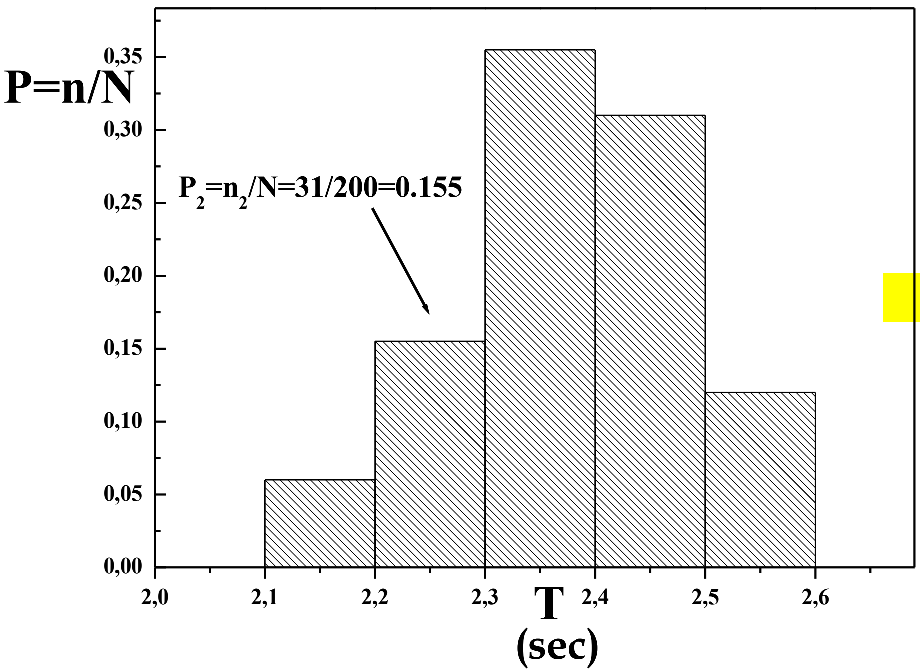
$\Delta T = 0.1$ s

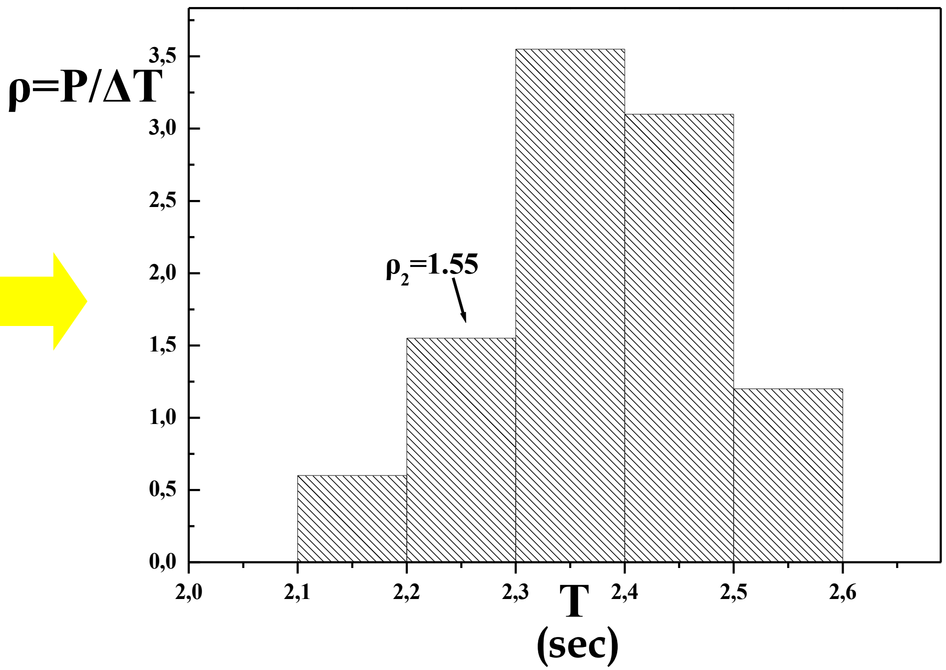
$$P_i = \lim_{N\to\infty} \frac{n_i}{N}$$



Πιθανότητα

Πυκνότητα Πιθανότητας



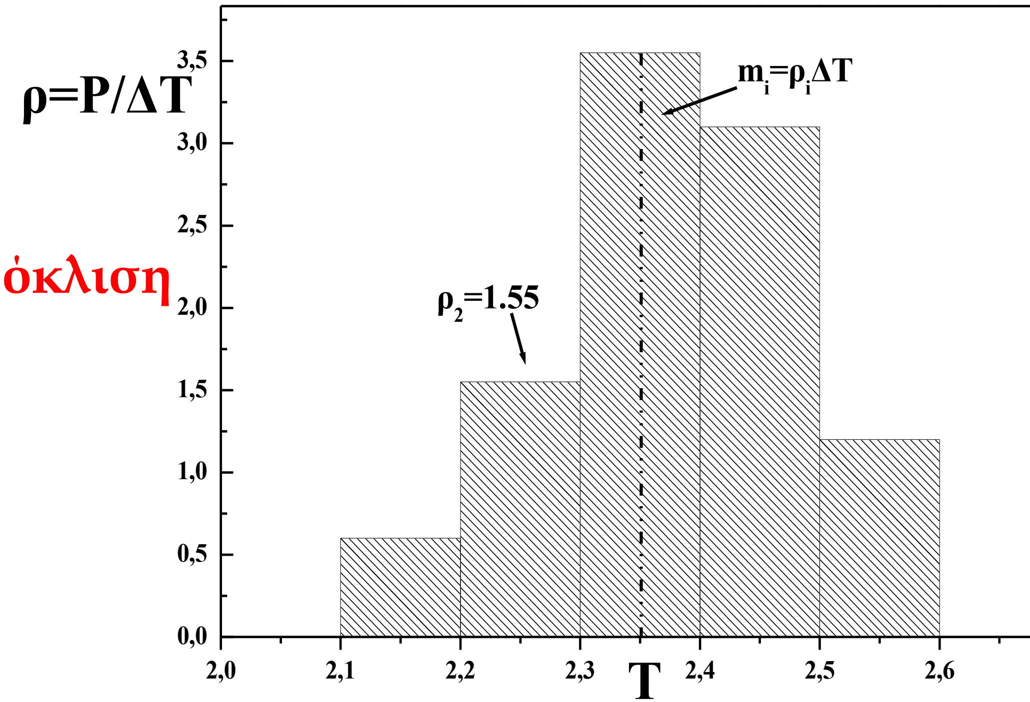


$$\langle T\rangle = \sum_{i=1}^{k}(m_i)T_i = \sum_{i=1}^{k}(\rho_i \Delta T)T_i$$

$$V = \sum_{i=1}^{k}(m_i)(\langle T\rangle - T_i)^2 = \sum_{i=1}^{k}(\rho_i \Delta T)(\langle T\rangle - T_i)^2$$

Ας θεωρήσουμε μία ράβδο με κατανομή μάζας αντίστοιχη του ιστογράμματος των μετρήσεων (πυκνότητα μάζας --- πυκνότητα πιθανότητας)

Πυκνότητα Πιθανότητας



μέση τιμή --- κέντρο μάζας

ροπή αδράνειας --- τετραγωνική απόκλιση

<T>=μ=2.35s

$V=0.01s^2$

RMS (Root Mean Square)$=[V]^{1/2}=0.10$s

$$\langle \mathrm{T} \rangle = \sum_{i=1}^{k} (\rho_i \Delta T) T_i$$

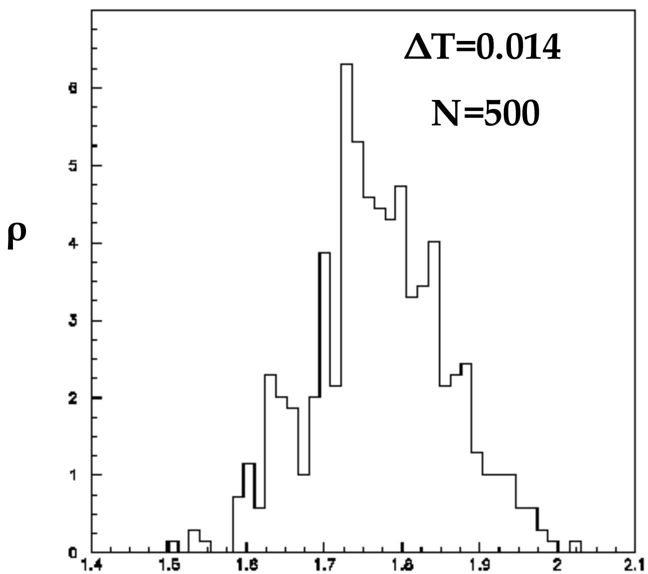
$$\mathrm{V} = \sum_{i=1}^{k} (\rho_i \Delta T)(\langle T \rangle - T_i)^2$$

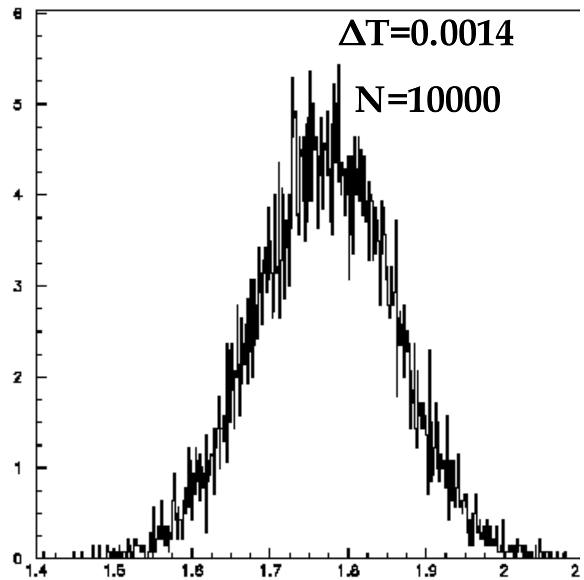
$$= \langle T \rangle^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{k} (\rho_i \Delta T)}_{1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} (\rho_i \Delta T) {T_i}^2}_{\langle T^2 \rangle} - 2\langle T \rangle \underbrace{\sum_{i=1}^{k} (\rho_i \Delta T) T_i}_{\langle \mathrm{T} \rangle}$$

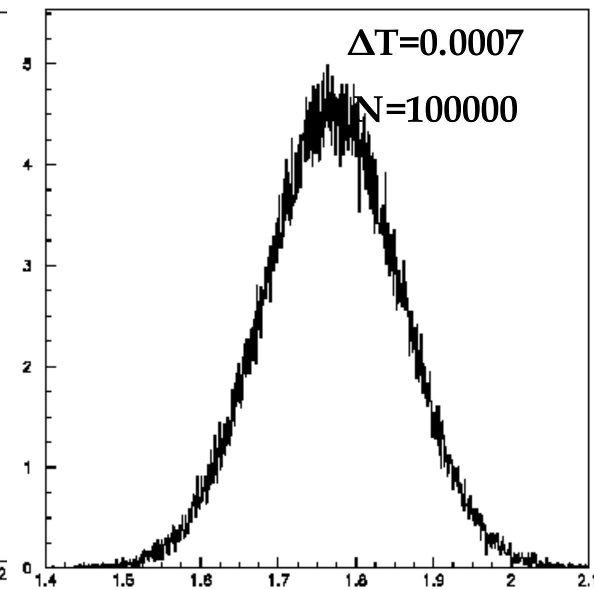
$$= \langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2$$

και ένας χρήσιμος υπολογισμός...

Στην περίπτωση που συλλέγονται περισσότερες μετρήσεις . . .





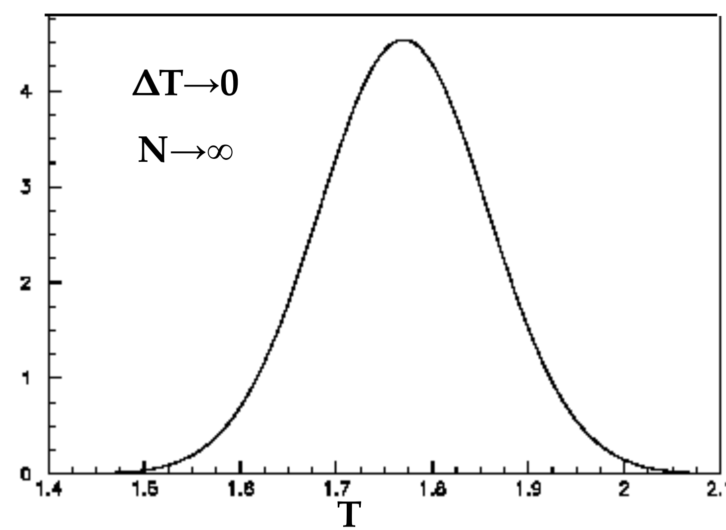


Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας
Probability Density Function (P.D.F)

$$\rho(T) \geq 0 \qquad \alpha \leq T \leq \beta$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \rho(T)\, dT = 1$$

$$\int_{x}^{y} \rho(T)\, dT = P(x \leq T \leq y)$$

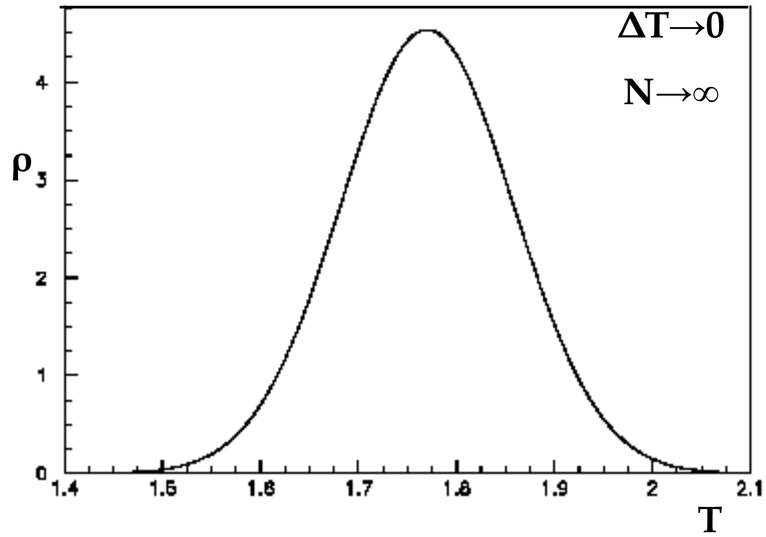


Στατιστικός Χαρακτήρας των Μετρήσεων

Το αποτέλεσμα της μέτρησης αποτελεί τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί συγκεκριμένη pdf

Παράδειγμα pdf: **Gaussian**

$$\rho(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{(T-T_0)^2}{2\cdot\sigma^2}}$$



$$\langle T \rangle = \sum_{i=1}^{k} (\rho_i \Delta T) T_i \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} T \rho(T) dT = T_0$$

$$V = \sum_{i=1}^{k} (\rho_i \Delta T)(\langle T \rangle - T_i)^2 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (\langle T \rangle - T)^2 \rho(T) dT = \sigma^2$$

Στις περισσότερες των περιπτώσεων (αλλά όχι πάντα) η πυκνότητα πιθανότητας μίας μέτρησης ακολουθεί Gaussian κατανομή

Για κάθε πρακτική χρήση…

Έστω ότι μετράμε την τιμή της Φυσικής ποσότητας X και ότι το αποτέλεσμα της μέτρησης είναι x. Εάν επαναλάβουμε το πείραμα το αποτέλεσμα της μέτρησης θα είναι διαφορετικό.

Το αποτέλεσμα της μέτρησης συμπεριφέρεται ως «τυχαία μεταβλητή» (random variable) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x), δηλ. η πιθανότητα το αποτέλεσμα της μέτρησης να είναι στο διάστημα [x,x+dx] ισούται με f(x)dx

Η μέση (ή αναμενόμενη) τιμή και η τετραγωνική απόκλιση των μετρήσεων ορίζονται ως:

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(\mathrm{x})\,dx$$

$$\mathrm{V}[\mathrm{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} (\langle x\rangle - \mathrm{x})^2 f(\mathrm{x})\,dx = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$$

Εν γένει, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, f(x), δεν είναι γνωστή. Αλλά πάντα είναι δυνατό να επαναλάβουμε N φορές την μέτρηση και να έχουμε διαθέσιμες N μετρήσεις x_i i=1,2,3,…,N

2.25	2.20	2.50	2.30	2.20	2.50	2.40	2.40	2.30	2.35	2.40	2.40	2.35	2.25	2.50	2.30	2.40	2.40	2.10	2.35
2.45	2.40	2.45	2.35	2.25	2.25	2.15	2.35	2.40	2.45	2.35	2.25	2.40	2.50	2.35	2.55	2.25	2.30	2.10	2.30
2.25	2.40	2.35	2.35	2.20	2.35	2.55	2.35	2.40	2.30	2.40	2.30	2.40	2.45	2.35	2.25	2.40	2.15	2.50	2.35
2.30	2.35	2.35	2.60	2.35	2.35	2.35	2.35	2.50	2.45	2.35	2.35	2.45	2.30	2.50	2.10	2.40	2.30	2.40	2.25
2.35	2.25	2.35	2.35	2.35	2.30	2.40	2.40	2.30	2.35	2.40	2.35	2.55	2.40	2.40	2.25	2.50	2.15	2.30	2.30
2.40	2.40	2.45	2.15	2.45	2.10	2.45	2.50	2.30	2.50	2.20	2.35	2.35	2.40	2.20	2.40	2.35	2.50	2.35	2.15
2.25	2.35	2.25	2.25	2.40	2.35	2.45	2.45	2.35	2.40	2.55	2.20	2.30	2.40	2.35	2.40	2.20	2.20	2.40	2.30
2.45	2.15	2.35	2.40	2.20	2.35	2.35	2.45	2.40	2.20	2.35	2.45	2.50	2.35	2.50	2.30	2.50	2.30	2.35	2.40
2.40	2.30	2.50	2.50	2.40	2.30	2.40	2.35	2.40	2.50	2.35	2.30	2.25	2.35	2.45	2.30	2.20	2.35	2.30	2.50
2.25	2.45	2.25	2.20	2.40	2.40	2.15	2.20	2.20	2.40	2.35	2.45	2.50	2.40	2.40	2.45	2.30	2.40	2.15	2.40

Ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών

$N \to \infty$

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(\mathrm{x})\,dx = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

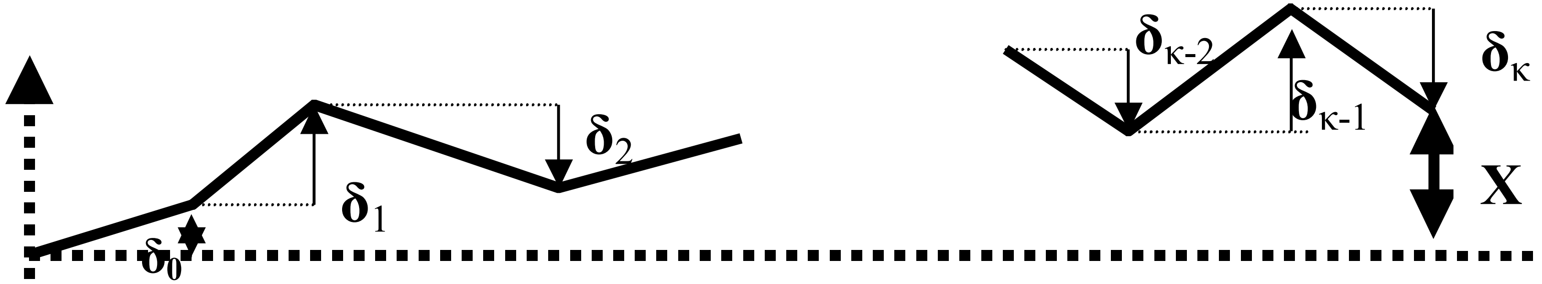
$$\mathrm{V}[\mathrm{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} (\langle x\rangle - \mathrm{x})^2 f(\mathrm{x})\,dx = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$$

Γιατί η πυκνότητα πιθανότητας μίας μέτρησης ακολουθεί Gaussian κατανομή ;

Συνέπεια του χαρακτήρα της μέτρησης (πληθώρα, ανεξαρτήτων παραγόντων σφάλματος) και ενός θεμελιώδους θεωρήματος της Στατιστικής

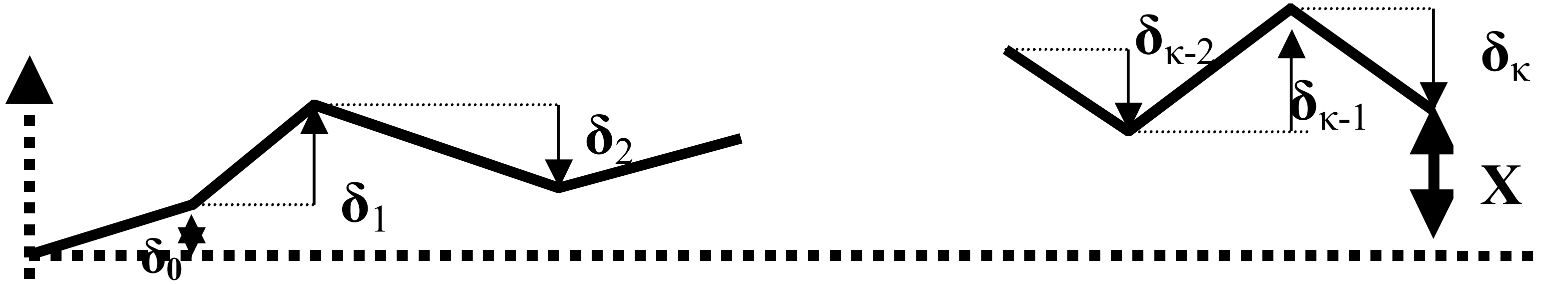
Θεώρημα του Κεντρικού Ορίου

- Έστω η τυχαία μεταβλητή y (π.χ. μία μέτρηση χρονικής διάρκειας) η οποία είναι άθροισμα N **ανεξαρτήτων** τυχαίων μεταβλητών:
  $y = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N$
- Κάθε τυχαία μεταβλητή x_i (π.χ. το αποτέλεσμα μίας φυσικής διαδικασίας που συμμετέχει στη μέτρηση) κατανέμεται με διαφορετική πυκνότητα πιθανότητας
- Όταν το N τείνει στο άπειρο, η τυχαία μεταβλητή y ακολουθεί Gaussian κατανομή

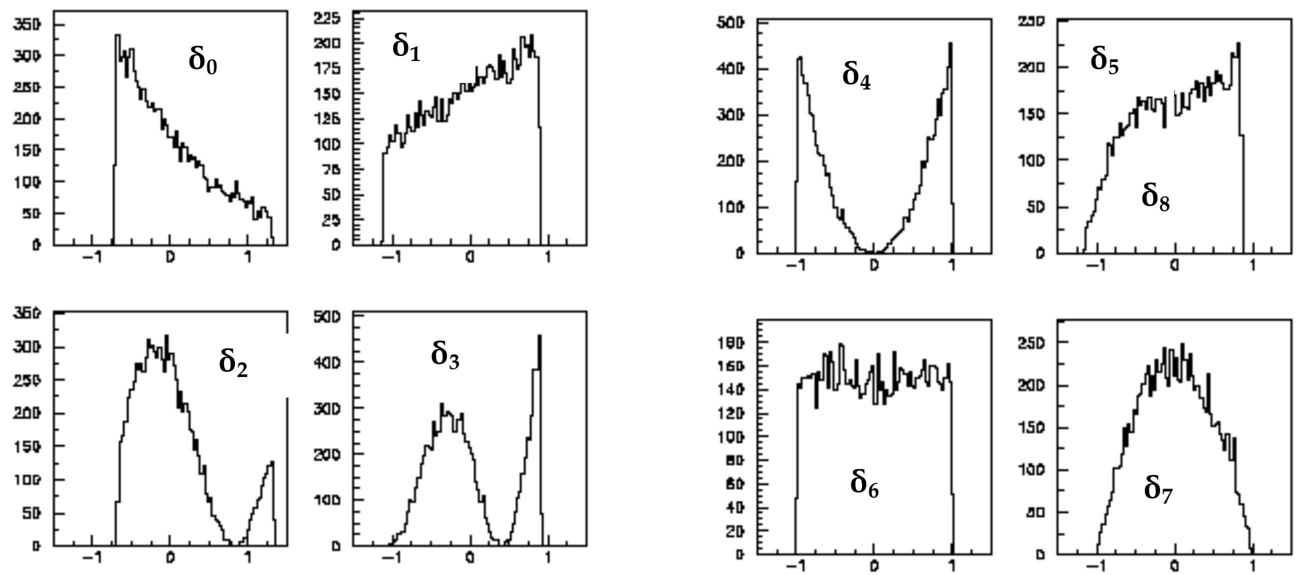


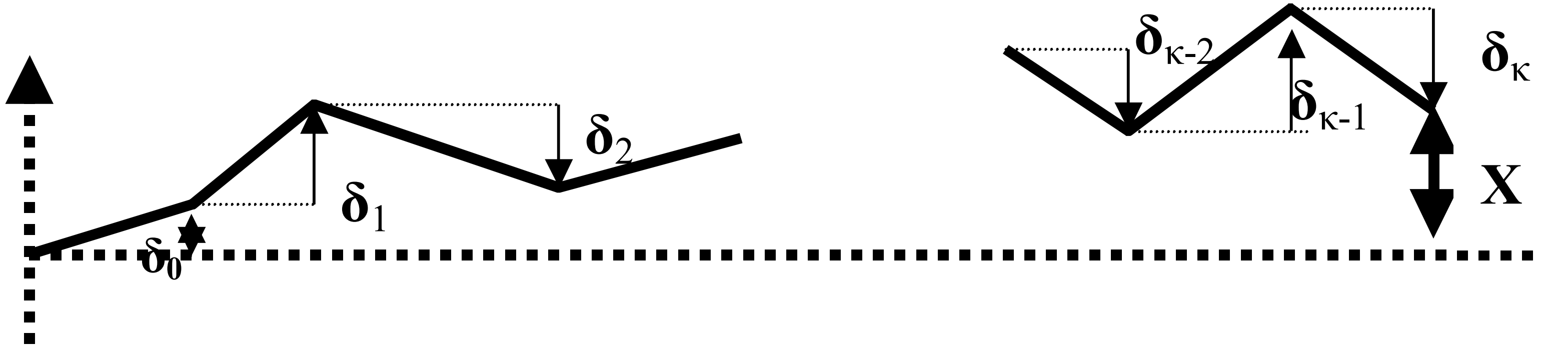
$$X = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{\kappa-2} + \delta_{\kappa-1} + \delta_\kappa$$

α/α	δ_0	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7
1	0.5089104	-1.012602	0.2182258	-.1096658	-.7919698	-.2191769	0.8401992	-.1770520
2	0.7535478	-.2755467	-.5057112	0.2332575	0.9867630	0.6608377	-.4864736	0.02147019
3	-.2690547	0.6152253	-.07292640	-.3493110	-.3762970	0.6178970	-.3448265	-.2135825
4	-.5486606	-.6145408	-.6013907	0.7873379	0.9382774	0.5321177	-.4309968	-.5627477
5	-.2589597	-.8597910	0.08698356	-.5983318	-.9683150	0.2662778	-.8117150	0.1977679
6.	-.3524164	0.7273226	0.3641990	-.7317709	0.9575515	-.6974518	0.9900396	0.4426645
.	-.3571880	0.5950775	1.078127	-.7914307	-.8893720	-.1058610	0.3125360	-.6917145
.	0.3600516	0.4217384	-.3432094	-.5888151	0.9750065	-.5691115	-.2876548	-.1265596
.	-.1056328	-.03206861	0.1682643	-.3588647	0.5049111	0.5884873	0.6926265	0.4457014
	…………	…………	…………..	……………	…………	…………..	…………..	……………..
	…………..	…………..	…………	………….	…………….	…………….	…………..	………………
	-.3917832	-.3495550	0.3313292	-.3907117	-.6639831	0.6154253	0.7765939	0.06680536
	0.6742030	-.5908434	1.030046	0.07462311	0.8708016	-.3920485	-.3649487	-.2585576
	0.3095728	0.6447705	0.1270295	0.8548069	0.8002952	0.7584423	-.4166576	-.4100336
	0.9137015	0.5184697	-.4018521	0.8992270	-.8417325	0.05132362	0.4711970	-.3946019
	1.037262	0.7235518	-.1701411	-.6552849	0.6047230	-.6568286	0.5508540	0.3241508
	-.6648500	-.2471015	-.3320913	-.3311071	-.8662446	0.3192317	0.4539642	-.4983336
	-.1742041	0.6935881	1.286793	-.5636537	0.9355375	0.8379005	0.8007530	-.8498850
	1.250761	0.8025460	-.6403781	-.3404261	0.8289630	-.9201580	0.6889148	-.4657341
	0.3366221	-.6362791	-.3725430	-.4443729	-.8528786	-.5940144	0.01068401	0.7948705
	0.3898519	-.7253602	-.5440173	0.7576617	-.6429563	-.2524261	-.1767772	-.4291601
	-.4325227	0.6624972	-.03087473	-.4503657	-.8505324	-.2697872	-.4799122	0.06974471



$$X = \delta_0+\delta_1+\delta_2+ \ldots.+\delta_{\kappa\text{-}2}+\delta_{\kappa\text{-}1}+\delta_\kappa$$

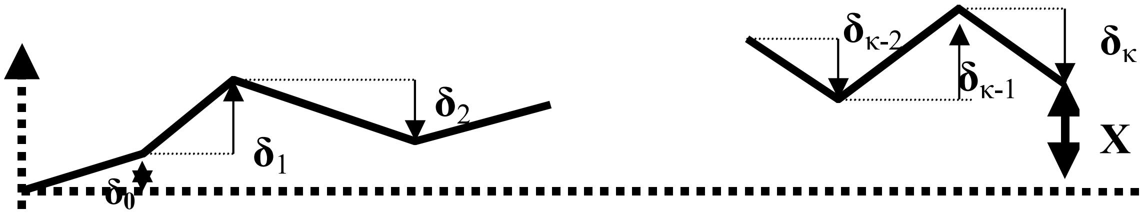




$$X = \delta_0+\delta_1+\delta_2+ \dots+\delta_{\kappa-2}+\delta_{\kappa-1}+\delta_\kappa$$

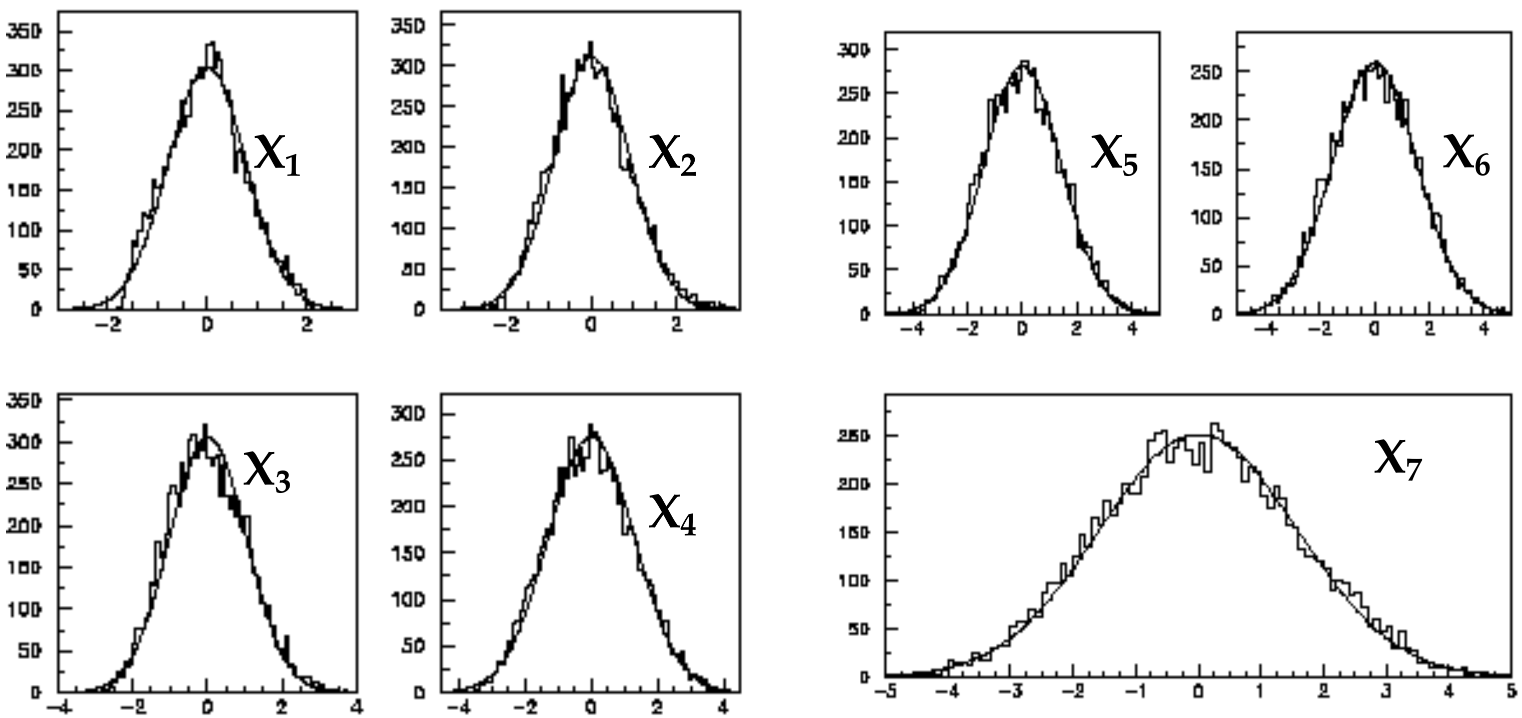
α/α	δ_0	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7
1	0.5089104	-1.012602	0.2182258	-.1096658	-.7919698	-.2191769	0.8401992	-.1770520
2	0.7535478	-.2755467	-.5057112	0.2332575	0.9867630	0.6608377	-.4864736	0.02147019
3	-.2690547	0.6152253	-.07292640	-.3493110	-.3762970	0.6178970	-.3448265	-.2135825
4	-.5486606	-.6145408	-.6013907	0.7873379	0.9382774	0.5321177	-.4309968	-.5627477
5	-.2589597	-.8597910	0.08698356	-.5983318	-.9683150	0.2662778	-.8117150	0.1977679
6.	-.3524164	0.7273226	0.3641990	-.7317709	0.9575515	-.6974518	0.9900396	0.4426645
.	-.3571880	0.5950775	1.078127	-.7914307	-.8893720	-.1058610	0.3125360	-.6917145
.	0.3600516	0.4217384	-.3432094	-.5888151	0.9750065	-.5691115	-.2876548	-.1265596
.	-.1056328	-.03206861	0.1682643	-.3588647	0.5049111	0.5884873	0.6926265	0.4457014
	…………	…………	………….	……………	…………	………….	………….	…………….
	………….	………….	…………	………….	…………….	………….	………….	………….
	-.3917832	-.3495550	0.3313292	-.3907117	-.6639831	0.6154253	0.7765939	…
	0.6742030	-.5908434	1.030046	0.07462311	0.8708016	-.3920485	-.3649487	0.06680536
	0.3095728	0.6447705	0.1270295	0.8548069	0.8002952	0.7584423	-.4166576	-.2585576
	0.9137015	0.5184697	-.4018521	0.8992270	-.8417325	0.05132362	0.4711970	-.4100336
	1.037262	0.7235518	-.1701411	-.6552849	0.6047230	-.6568286	0.5508540	-.3946019
	-.6648500	-.2471015	-.3320913	-.3311071	-.8662446	0.3192317	0.4539642	0.3241508
	-.1742041	0.6935881	1.286793	-.5636537	0.9355375	0.8379005	0.8007530	-.4983336
	1.250761	0.8025460	-.6403781	-.3404261	0.8289630	-.9201580	0.6889148	-.8498850
	0.3366221	-.6362791	-.3725430	-.4443729	-.8528786	-.5940144	0.01068401	-.4657341
	0.3898519	-.7253602	-.5440173	0.7576617	-.6429563	-.2524261	-.1767772	0.7948705
	-.4325227	0.6624972	-.03087473	-.4503657	-.8505324	-.2697872	-.4799122	-.4291601
								0.06974471

X1=δ0+δ1
X2=δ0+δ1+δ2
X3=δ0+δ1+δ2+δ3+δ4
X4=δ0+δ1+δ2+δ3+δ4+δ5
X5=δ0+δ1+δ2+δ3+δ4+δ5+δ6
X6=δ0+δ1+δ2+δ3+δ4+δ5+δ6+δ7
X7=δ0+δ1+δ2+δ3+δ4+δ5+δ6+δ7+δ8



$$X = \delta_0+\delta_1+\delta_2+ \dots +\delta_{\kappa-2}+\delta_{\kappa-1}+\delta_\kappa$$

X1=δ0+δ1
X2=δ0+δ1+δ2
X3=δ0+δ1+δ2+δ3+δ4
X4=δ0+δ1+δ2+δ3+δ4+δ5
X5=δ0+δ1+δ2+δ3+δ4+δ5+δ6
X6=δ0+δ1+δ2+δ3+δ4+δ5+δ6+δ7
X7=δ0+δ1+δ2+δ3+δ4+δ5+δ6+δ7+δ8



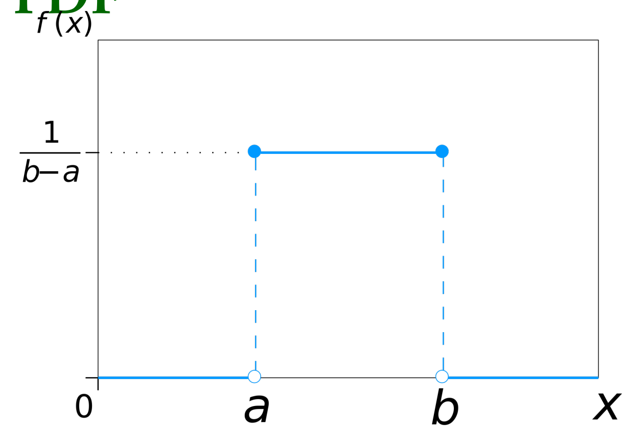
Συναρτήσεις Πυκνότητας Πιθανότητας Συνεχών Τυχαίων Μεταβλητών

Ισοπίθανη (Ομοιόμορφη) PDF

$$\rho(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a \leq x \leq b$$

$$\langle x\rangle = \int_a^b x\,\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{b+a}{2}$$

$$V[x] = \int_a^b (\langle x\rangle - x)^2\,\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

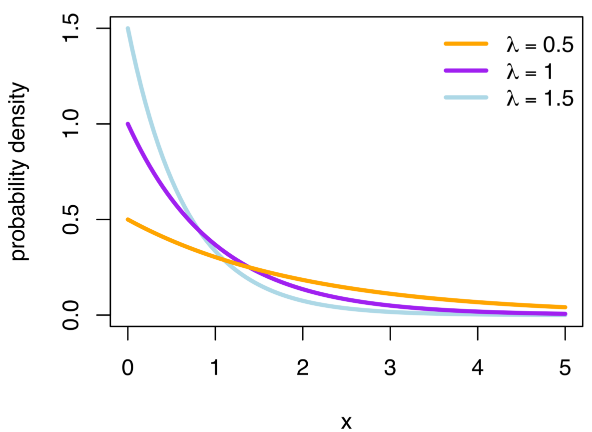


Εκθετική PDF

$$\rho(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} \qquad 0 \leq x$$

$$\langle x\rangle = \int_0^\infty x\lambda\, e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}$$

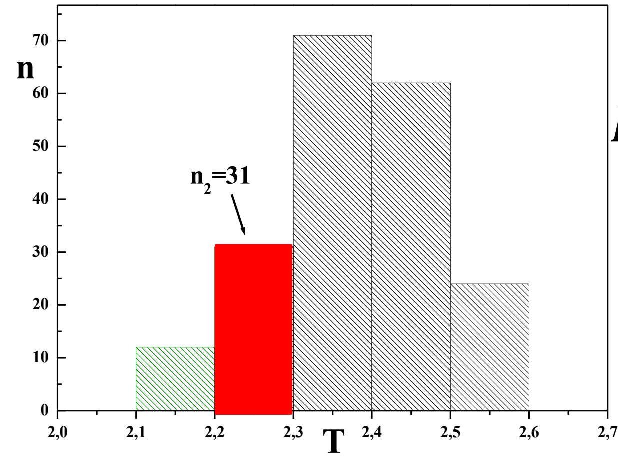
$$V[x] = \int_0^\infty (\langle x\rangle - x)^2 \lambda\, e^{-\lambda x}\,dx = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$



Συναρτήσεις Πυκνότητας Πιθανότητας Διακριτών Τυχαίων Μεταβλητών

Διωνυμική Συνάρτηση Πιθανότητας (N δοκιμές, k επιτυχίες, p πιθανότητα επιτυχίας)

$$P(k;N,p) = \overbrace{\frac{N!}{k!\,(N-k)!}}^{\binom{N}{k}} p^k (1-p)^{N-k}$$



$N = \sum_{i=1}^{5} n_i$=200

ΔT=0.1 s

$\langle k \rangle$=Np

$V[k]$=Np(1-p)

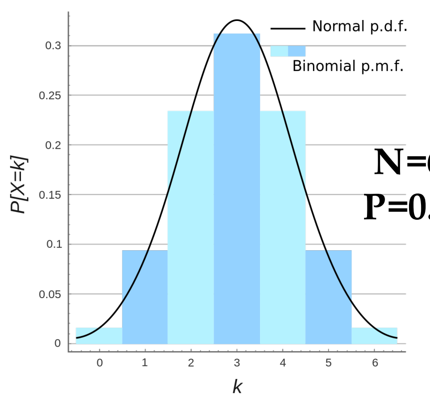
Εάν $p \ll 1$ ώστε (1-p)~1

$V[k]$=Np(1-p)$\cong Np \cong k$

RMS[k]=(k)$^{1/2}$

k=n_2=31
N=200
p~0.15
V[n_2]~26.35 ή RMS[n_2]=5.13

Ασυμπτωτικά η Διωνυμική Συνάρτηση Πιθανότητας προσεγγίζει την Gaussian



N=6
P=0.5

Poisson Συνάρτηση Πιθανότητας

Εάν $N \to \infty$ $\kappa\alpha\iota\ p \to 0$ ($\Delta T \to 0$) ώστε μ=Np

$$P(k; N, p) = \frac{N!}{k!\,(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$ **Poissonian**

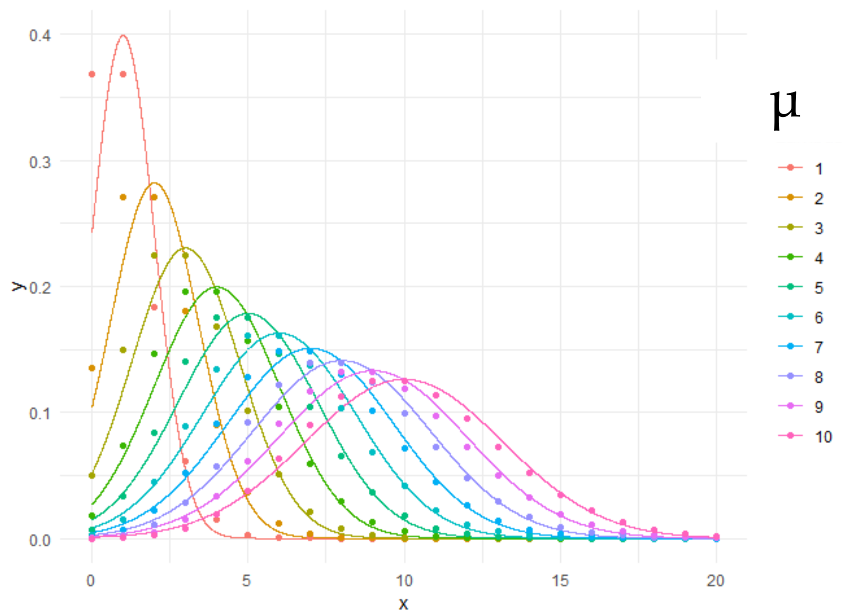
$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

$\langle k \rangle = \mu$

$V[k] = \mu$

Παράδειγμα Ι: Ένα γεγονός συμβαίνει με ρυθμό r. Η πιθανότητα να συμβούν k γεγονότα σε χρόνο ΔΤ είναι P(k;μ=rΔΤ)

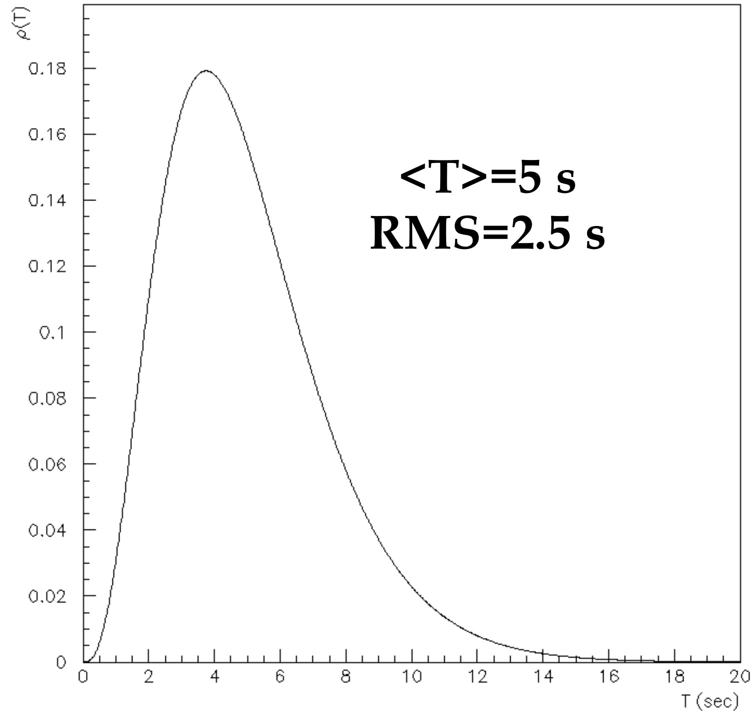
Ασυμτωτικά η Poisson Συνάρτηση Πιθανότητας προσεγγίζει την Gaussian



Στατιστική συμπεριφορά της μέτρησης και το Πείραμα

Η μέση τιμή της πυκνότητας πιθανότητας των μετρήσεων συνδέεται με την αληθή τιμή και η διασπορά (RMS -το εύρος) συνδέεται με την πειραματική μεθοδολογία και τα μετρητικά όργανα.

Ας υποθέσουμε ότι η αληθής τιμή είναι $T_{αληθ.}$=4 s και ότι οι μετρήσεις ακολουθούν την ακόλουθη pdf



Πάντα θα υπάρχει μία σαφής σχέση μεταξύ της αληθούς τιμής και της μέσης τιμής των μετρήσεων του φυσικού μεγέθους. Στην περίπτωση που συμπίπτουν λέμε πως δεν υπάρχει συστηματικό σφάλμα (ή προκατάληψη).

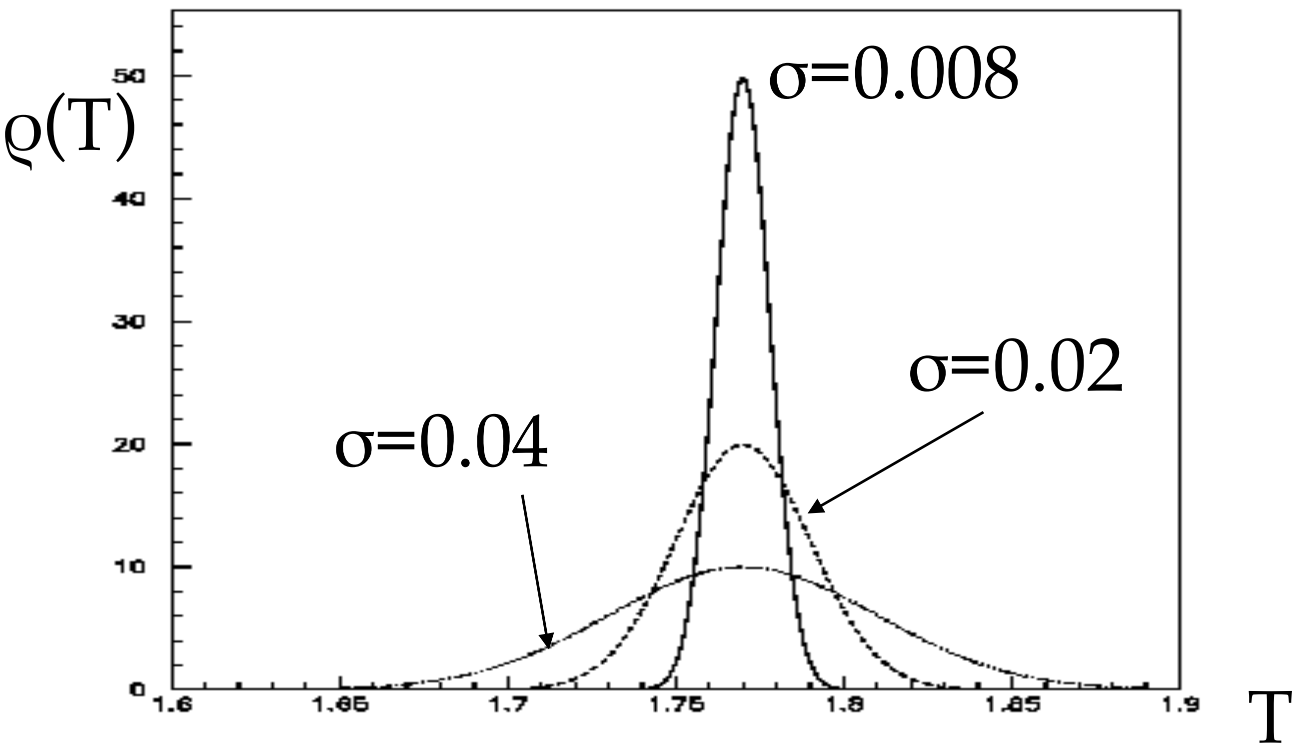
Στα επόμενα θα θεωρούμε ότι $\langle T \rangle = T_{αληθές}$

Το «εύρος» της κατανομής των μετρήσεων, που εκφράζεται από το RMS, είναι αποτέλεσμα της μετρητικής διαδικασίας (συμπεριλαμβανομένων και Φυσικών περιορισμών, π.χ. Απροσδιοριστία)

Παράδειγμα «Διακριτικής Ικανότητας»

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_i^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_i\right)^2} = 0.10s$$

2.25	2.20	2.50	2.30	2.20	2.50	2.40	2.40	2.30	2.35	2.40	2.40	2.35	2.25	2.50	2.30	2.40	2.40	2.10	2.35
2.45	2.40	2.45	2.35	2.25	2.25	2.15	2.35	2.40	2.45	2.35	2.25	2.40	2.50	2.35	2.55	2.25	2.30	2.10	2.30
2.25	2.40	2.35	2.35	2.20	2.35	2.55	2.35	2.40	2.30	2.40	2.30	2.40	2.45	2.35	2.25	2.40	2.15	2.50	2.35
2.30	2.35	2.35	2.60	2.35	2.35	2.35	2.35	2.50	2.45	2.35	2.35	2.45	2.30	2.50	2.10	2.40	2.30	2.40	2.25
2.35	2.25	2.35	2.35	2.35	2.30	2.40	2.40	2.30	2.35	2.40	2.35	2.55	2.40	2.40	2.25	2.50	2.15	2.30	2.30
2.40	2.40	2.45	2.15	2.45	2.10	2.45	2.50	2.30	2.50	2.20	2.35	2.35	2.40	2.20	2.40	2.35	2.50	2.35	2.15
2.25	2.35	2.25	2.25	2.40	2.35	2.45	2.45	2.35	2.40	2.55	2.20	2.30	2.40	2.35	2.40	2.20	2.20	2.40	2.30
2.45	2.15	2.35	2.40	2.20	2.35	2.35	2.45	2.40	2.20	2.35	2.45	2.50	2.35	2.50	2.30	2.50	2.30	2.35	2.40
2.40	2.30	2.50	2.50	2.40	2.30	2.40	2.35	2.40	2.50	2.35	2.30	2.25	2.35	2.45	2.30	2.20	2.35	2.30	2.50
2.25	2.45	2.25	2.20	2.40	2.40	2.15	2.20	2.20	2.40	2.35	2.45	2.50	2.40	2.40	2.45	2.30	2.40	2.15	2.40

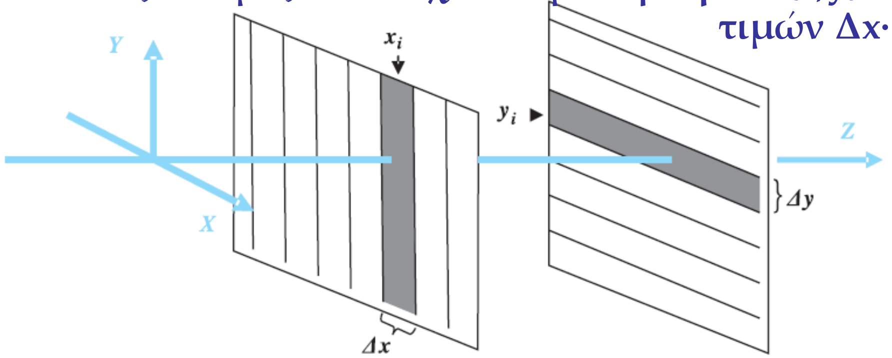


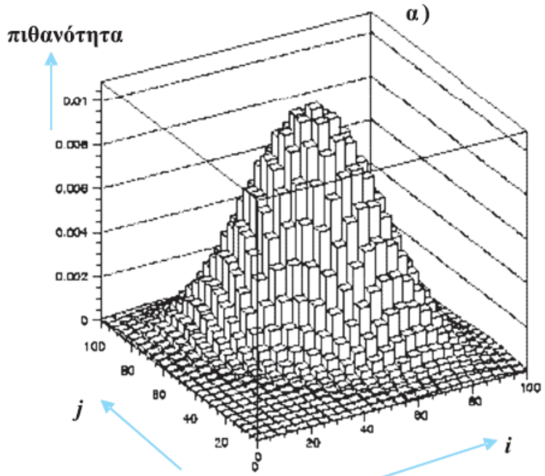
Όταν ένα γεγονός χαρακτηρίζεται από 2 (ή περισσότερες) μετρήσεις…

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, f(x,y), θα ορίζεται ως:

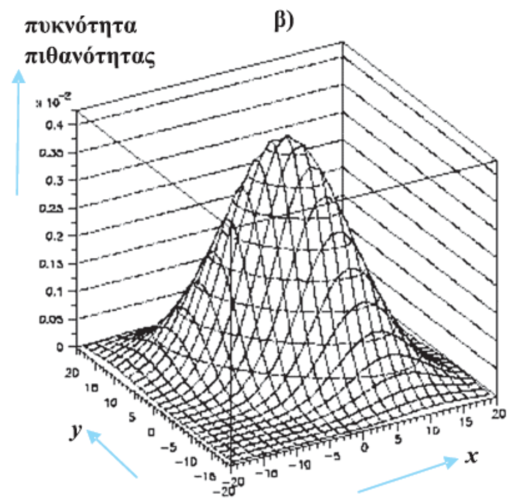
$$f(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(\Delta x, \Delta y)}{(\Delta x \cdot \Delta y)} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ N \to \infty}} \frac{\left(n_{xy} / N \right)}{(\Delta x \cdot \Delta y)}$$

όπου από τις N τιμές των τυχαίων μεταβλητών {x,y} υπάρχουν nxy τιμές που ανήκουν στο διάστημα τιμών Δx·Δy.





$$\rho_{ij} = \frac{P_{ij}}{\Delta x \cdot \Delta y}$$



$$P_{ij} = \lim_{N \to \infty} \frac{n_{ij}}{N} \quad \text{ή} \quad P_{ij} \cong \frac{n_{ij}}{N}, \ \text{για} \quad N \quad \text{μεγάλο}$$

$$f(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(\Delta x, \Delta y)}{(\Delta x \cdot \Delta y)} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ N \to \infty}} \frac{\left(n_{xy} / N \right)}{(\Delta x \cdot \Delta y)}$$

Έστω ότι ένα γεγονός χαρακτηρίζεται από τις σύγχρονες μετρήσεις λ φυσικών μεγεθών: X_1, X_2, X_3,...X_λ (π.χ. σε ένα πείραμα μελετούμε την κίνηση ηλεκτρονίων που εκπέμπονται από θερμαινόμενη μεταλλική πλάκα και μας ενδιαφέρουν οι 3 συντεταγμένες της θέσης εκπομπής του ηλεκτρονίου και οι 3 συντεταγμένες της ορμής του κατά την εκπομπή)

Έστω x_1, x_2, x_3,…,x_λ ότι είναι λ σύγχρονες μετρήσεις των φυσικών μεγεθών που μας ενδιαφέρουν. Προφανώς εάν επαναλάβουμε το πείραμα θα μετρήσουμε διαφορετικές τιμές για τα φυσικά μεγέθη.

Έστω ότι η κοινή πυκνότητα πιθανότητας των μετρήσεων δίνεται από την $f(x_1, x_2, x_3,…,x_\lambda)$, δηλαδή η πιθανότητα σε ένα πείραμα οι φυσικές ποσότητες **X_1, X_2, X_3,...X_λ** να μετρηθούν συγχρόνως και να βρεθούν $[x_1, x_1+dx_1]$, $[x_2, x_2+dx_2]$, …, $[x_\lambda, x_\lambda+dx_\lambda]$ είναι $f(x_1, x_2, x_3,…,x_\lambda)dx_1dx_2…dx_\lambda$

$$\langle x_i\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_1, x2, \dots x_\lambda)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_\lambda$$

$$V[x_i]= \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}(\langle x_i\rangle - x_i)^2 f(x_1, x2, \dots x_\lambda)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_\lambda = \langle x_i^2\rangle - \langle x_i\rangle^2 = \mathrm{cov}[x_i, x_i]$$

$$\mathrm{cov}[x_i, x_j]= \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}(\langle x_i\rangle - x_i)(\langle x_j\rangle - x_j) f(x_1, x2, \dots x_\lambda)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_\lambda = \langle x_i x_j\rangle - \langle x_i\rangle\langle x_j\rangle$$

Για κάθε πρακτική χρήση...

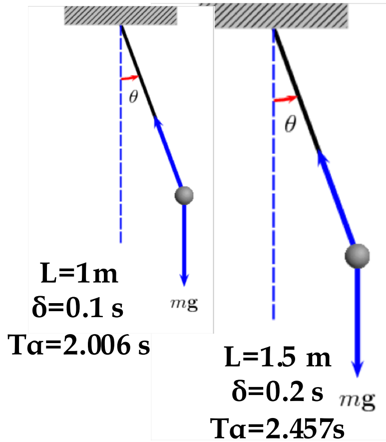
Έστω σε ένα πείραμα οι u και w είναι σύγχρονες μετρήσεις δύο φυσικών μεγεθών U και W Έστω ότι επαναλαμβάνουμε το πείραμα N φορές: $\{u^1,w^1\}$, $\{u^2,w^2\}$, $\{u^3,w^3\}$, …, $\{u^N,w^N\}$. Χρησιμοποιώντας τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών προσεγγίζουμε τις στατιστικές ποσότητες ως:

$$\langle u\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u^i \qquad \langle w\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w^i$$

$$V[u]= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(u^i)^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u^i\right)^2 \qquad V[w]= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(w^i)^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w^i\right)^2$$

$$\mathrm{cov}[u, w]= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(u^i)(w^i) - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u^i\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w^i\right)$$

Εάν οι μετρήσεις u και w είναι αμοιβαία ανεξάρτητες τότε cov[u, w]=0

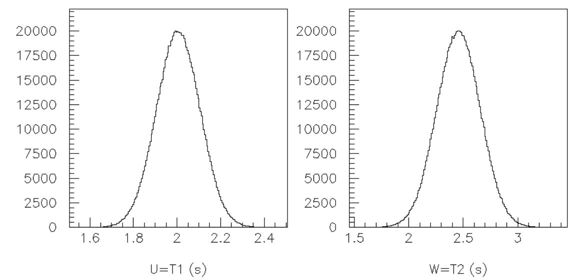


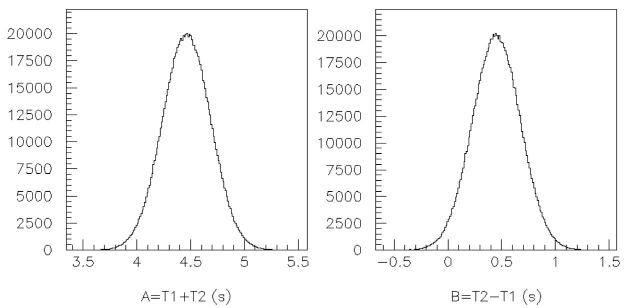
$\langle u \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u^i = 2.006$ s

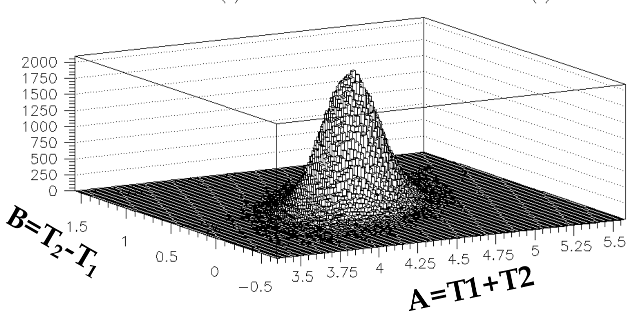
$V[u] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(u^i)^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u^i\right)^2 = 0.01\ s^2$

$\langle w \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w^i = 2.457$ s

$V[w] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(w^i)^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w^i\right)^2 = 0.04\ s^2$







$cov[u, w] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(u^i)(w^i) - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u^i\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} w^i\right) = 0$

<A>=<u+w>=4.463 s
$V[A] = 0.05\ s^2$

<B>= <w-u>=0.4512 s
$V[B] = 0.05\ s^2$

Οι τυχαίες μεταβλητές A και B είναι αμοιβαία εξαρτημένες διότι αμφότερες είναι συναρτήσεις των ιδίων (ανεξάρτητων) τυχαίων μεταβλητών u και w

$Cov[A, B] = 0.03\ s^2$

Οι μεταβλητές A και B είναι αμοιβαία εξαρτημένες

Οι συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών είναι και αυτές τυχαίες μεταβλητές.

Έστω μία φυσική ποσότητα, Φ, που εξαρτάται από n άλλες φυσικές ποσότητες ($X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$) μέσω της σχέσης $\Phi = g(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$, όπου g είναι γνωστή συνάρτηση.

π.χ. η μάζα ενός σωματίου εκφράζεται συναρτήσει της ενέργειας και των συνιστωσών της ορμής ως:

$$\underbrace{m}_{\Phi} = \frac{1}{c^2}\left[\left(\underbrace{E}_{X_1}\right)^2 - c^2\left(\underbrace{P_x}_{X_2}\right)^2 - c^2\left(\underbrace{P_y}_{X_3}\right)^2 - c^2\left(\underbrace{P_z}_{X_4}\right)^2\right]^{1/2}$$

Έστω ότι εκτελούμε ένα πείραμα και μετράμε τις ποσότητες $\{E, P_x, P_y, P_z\}_1$ και υπολογίζουμε την τιμή της μάζας, m_1. Εάν επαναλάβουμε το πείραμα, λόγω της μετρητικής διαδικασίας, θα βρούμε διαφορετικές τιμές για την ενέργεια και τις ορμές (έστω $\{E, P_x, P_y, P_z\}_2$) και θα υπολογίσουμε διαφορετική τιμή για την μάζα (έστω m_2). Συνεπώς και η μάζα, ως συνάρτηση τυχαίων μεταβλητών, είναι και αυτή τυχαία μεταβλητή.

Θα υπολογίζουμε την τιμή της τυχαίας μεταβλητής φ από τις μετρήσεις $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ [$\varphi = g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$] και θα εφαρμόζουμε τις ακόλουθες σχέσεις για να υπολογίζουμε τις στατιστικές της ιδιότητες.

Έστω $\{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n\}$ είναι οι μέσες (αναμενόμενες) τιμές και $V[x_1], V[x_2], \ldots, V[x_n]$ είναι οι τετραγωνικές διασπορές των μετρήσεων $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Έστω ακόμη πως οι μετρήσεις $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ δεν είναι αμοιβαία ανεξάρτητες και έχουν συνδιασπορές $cov[x_i, x_j]$#0 (i, j=1, 2 ..n με i#j). Τότε:

$$\langle \varphi \rangle \approx g(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n)$$

$$V[\varphi] \approx \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\bigg|_{\mu_i}\right)^2 V[x_i] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\bigg|_{\mu_i}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\bigg|_{\mu_j}\right)\mathrm{cov}[x_i, x_j]$$

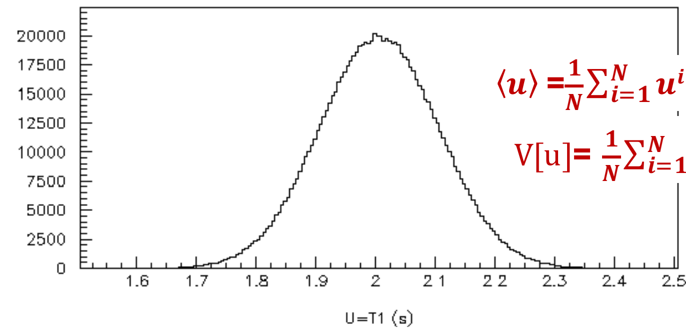
Στην περίπτωση όπου η συνάρτηση **$g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ είναι γραμμική**

$$g(x_1, x_2, x_3, \ldots, xn) = \sum_{k=1}^{n} C_k x_k \quad \mu\varepsilon\ C_k \in R$$

οι προηγούμενες σχέσεις είναι ακριβείς

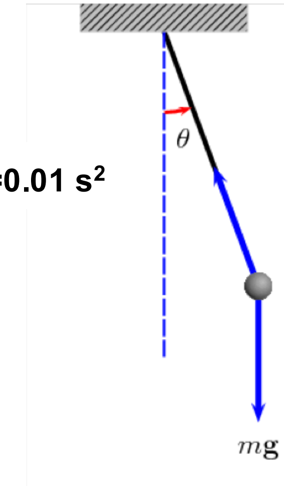
α/α	U=T1 (s)
1	2.022709
2	2.116189
2	1.982968
4	1.952893
5	2.166431
6	1.965869
7	1.982415
8	2.006572
9	2.148145
10	2.062479
11	2.115925
12	2.032019
13	1.904350
14	1.842956
15	2.061344
16	2.077441
17	2.089293
	...
	...
999998	2.008615
999999	2.214944
1000000	1.863067

$$u = \frac{1}{9}\sum_{k=i}^{i+9} T_k$$



$$\langle u\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u^i = 2.006\ \text{s}$$

$$V[u] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(u^i)^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u^i\right)^2 = 0.01\ \text{s}^2$$



L=1m
δ=0.1 s
Tα=2.006 s

Ας προβλέψουμε...

$$\varphi = g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_9) = \sum_{k=1}^{9}\frac{x_k}{9}$$

$$\langle\varphi\rangle = g(\mu_1, \mu_2, \dots\mu_9) = \sum_{k=1}^{9}\frac{\mu_k}{9} = 2.006\ \text{s}$$

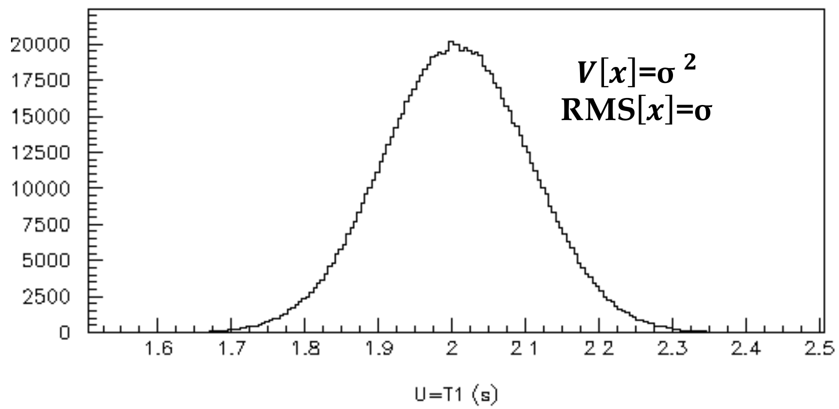
$$\text{cov}[x_i, x_j] = 0$$

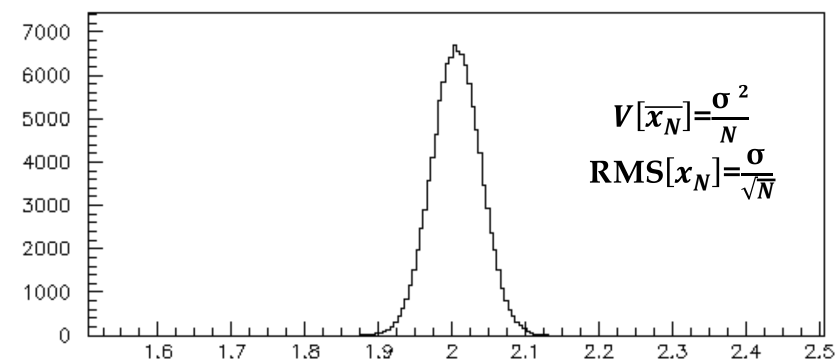
$$V[\varphi] = \sum_{i=1}^{n}\left(\underbrace{\frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{\mu_i}}_{\frac{1}{9}}\right)^2 \underbrace{V[x_i]}_{0.01} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{\mu_i}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\Big|_{\mu_j}\right)\text{cov}[x_i, x_j]}_{0}$$

$$= 9\left(\frac{1}{9}\right)^2 0.01 = 0.0011\ \text{s}^2$$

Προτιμούμε να επαναλαμβάνουμε Ν φορές μία μέτρηση και να υπολογίζουμε τον μέσο όρο, διότι:

1) **Ο μέσος όρος Ν μετρήσεων έχει την ίδια μέση (αναμενόμενη) τιμή με τις μετρήσεις (θυμηθείτε ότι η αληθής τιμή της φυσικής ποσότητας συνδέεται με την μέση τιμή των μετρήσεων)**
2) **Η τετραγωνική διασπορά του μέσου όρου Ν μετρήσεων είναι το 1/Ν της διασποράς μιας μέτρησης (ή το RMS του μέσου όρου είναι το $\frac{1}{\sqrt{N}}$ του RMS μιας μέτρησης)**





$\overline{x_N}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$

Μια ακόμα παρατήρηση για τις συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών

Έστω δύο φυσικές ποσότητες, Φ και Θ, που εξαρτώνται από n άλλες φυσικές ποσότητες ($X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$) μέσω των σχέσεων $\Phi = g(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$ και $\Theta = h(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$, όπου g και h είναι γνωστές συναρτήσεις, π.χ.

$$\underbrace{m}_{\Phi} = \frac{1}{c^2}\left[\left(\underbrace{E}_{X_1}\right)^2 - c^2\left(\underbrace{P_x}_{X_2}\right)^2 - c^2\left(\underbrace{P_y}_{X_3}\right)^2 - c^2\left(\underbrace{P_z}_{X_4}\right)^2\right]^{1/2} \qquad \underbrace{v}_{\Theta} = c^2\,\frac{\left[\left(\underbrace{P_x}_{X_2}\right)^2 + \left(\underbrace{P_y}_{X_3}\right)^2 + \left(\underbrace{P_z}_{X_4}\right)^2\right]^{1/2}}{\underbrace{E}_{X_1}}$$

Έστω ότι προσδιορίζουμε τις τιμές των δύο φυσικών μεγεθών Φ και Θ μετρώντας συγχρόνως τις ποσότητες ($X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$) και έστω ότι βρίσκουμε $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Προφανώς, προσδιορίζουμε τις τιμές των φυσικών μεγεθών Φ και Θ ως: $\varphi = g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $\theta = h(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Αμφότερα τα φ και θ συμπεριφέρονται ως τυχαίες μεταβλητές.

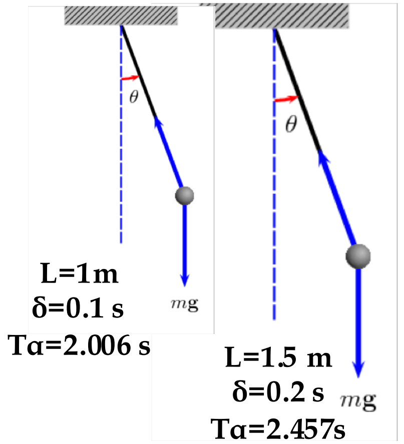
Στη γενική περίπτωση οι μεταβλητές φ και θ είναι αμοιβαία εξαρτημένες διότι υπολογίζονται ως συναρτήσεις των τιμών των ιδίων μετρήσεων $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

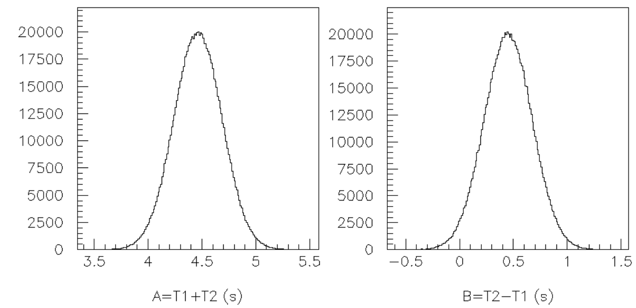
Η συνδιασπορά των φ και θ (cov[φ,θ]) μπορεί να υπολογισθεί εάν ξέρουμε τις μέσες (αναμενόμενες) τιμές $\{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n\}$, τις τετραγωνικές διασπορές $\{V[x_1], V[x_2], \ldots, V[x_n]\}$ των μετρήσεων $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, (καθώς και τις συνδιασπορές $cov[x_i, x_j]$ (i, j=1, 2 ..n με i#j) σε περίπτωση που οι μετρήσεις $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ δεν είναι αμοιβαία ανεξάρτητες).

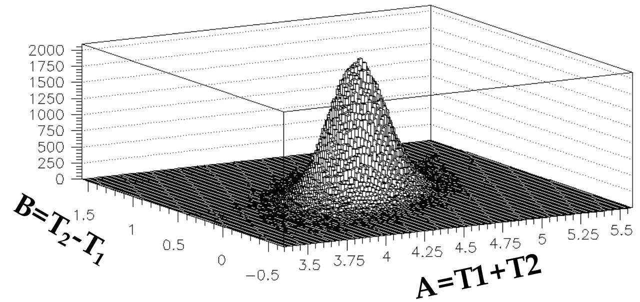
$$\mathrm{cov}[\varphi,\theta] \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{\mu_i} \frac{\partial h}{\partial x_i}\Big|_{\mu_i} V[x_i] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{\mu_i}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial x_j}\Big|_{\mu_j}\right)\mathrm{cov}[x_i, x_j]$$

Εάν οι συναρτήσεις g και h είναι γραμμικές συναρτήσεις των μετρήσεων (δηλαδή είναι της μορφής $\sum_{k=1}^{n} C_k x_k$ με $C_k \in R$) τότε η παραπάνω σχέση είναι ακριβής

α/α	U=T1 (s)	W=T2 (s)	A=T1+T2 (s)	B=T2-T1 (s)
1	2.022709	2.218750	4.241459	0.1960413
2	2.116189	2.730309	4.846498	0.6141193
2	1.982968	2.573931	4.556900	0.5909625
4	1.952893	1.865179	3.818073	-0.08771420
5	2.166431	2.576018	4.742449	0.4095874
6	1.965869	2.295310	4.261179	0.3294407
7	1.982415	2.368328	4.350743	0.3859130
8	2.006572	2.381328	4.387900	0.3747561
9	2.148145	2.426511	4.574656	0.2783663
10	2.062479	2.302736	4.365214	0.2402568
11	2.115925	2.288531	4.404456	0.1726065
12	2.032019	2.444279	4.476298	0.4122596
13	1.904350	2.494322	4.398672	0.5899725
14	1.842956	2.207457	4.050412	0.3645010
15	2.061344	2.473723	4.535067	0.4123788
16	2.077441	2.657671	4.735112	0.5802310
17	2.089293	2.441258	4.530551	0.3519659
	...	...	...	...
	...	...	...	...
999998	2.008615	2.707739	4.716353	0.6991243
999999	2.214944	2.572175	4.787119	0.3572304
1000000	1.863067	2.203352	4.066420	0.3402853







<A>=<u+w>=4.463 s
V[A]=0.05 s^2

<B>= <w-u>=0.4512 s
V[B]=0.05 s^2

Cov[A, B] = 0.03 s^2

$$\mathrm{cov}[A,B] \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial x_i}\Big|_{\mu_i} \frac{\partial B}{\partial x_i}\Big|_{\mu_i} V[x_i] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial x_i}\Big|_{\mu_i}\right)\left(\frac{\partial B}{\partial x_j}\Big|_{\mu_j}\right) \mathrm{cov}[x_i, x_j]$$

$$x_1 \rightarrow T_1 \;, x_2 \rightarrow T_2 \;,\; A = T_1 + T_2 \;,\; B = T_2 - T_1$$

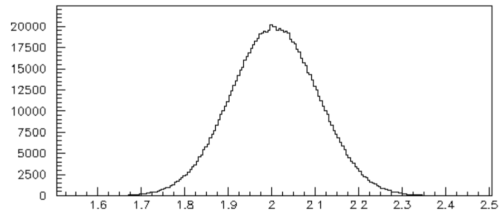
$$V[x_1] = (0.1)^2 \qquad V[x_2] = (0.2)^2 \;, \mathrm{cov}[x_1, x_2] = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_1} = \frac{\partial A}{\partial x_2} = 1 \;,\; \frac{\partial B}{\partial x_1} = -1 \;,\; \frac{\partial B}{\partial x_2} = 1$$

$$\mathrm{cov}[A,B] = V[x_2] - V[x_1] = 0.03\ s^2$$

Εκτίμηση της αληθούς τιμής

- Μέχρι τώρα μιλήσαμε για την στατιστική συμπεριφορά των μετρήσεων, π.χ. πως κατανέμεται ένα μεγάλο πλήθος μετρήσεων



f(T): συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

f(T)dT: πιθανότητα η μέτρηση να είναι στο [T, T+dT]

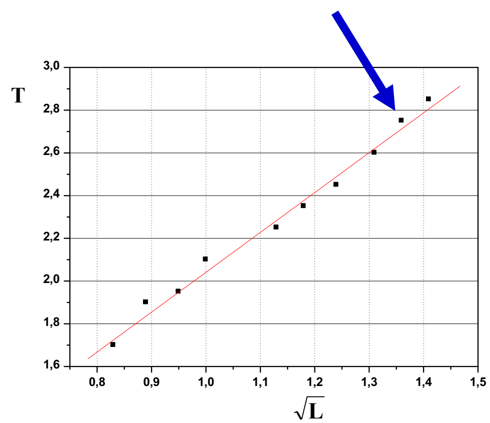
$P(a \leq T \leq b) = \int_a^b f(T)dT$: η πιθανότητα η μέτρηση να είναι $a \leq T \leq b$

$\langle T \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(T)dT \equiv$ *μέση (αναμενόμενη) τιμή* $\equiv$ *αληθής τιμή (συνήθως)*

$V[T] = \langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2$: τετραγωνική απόκλιση

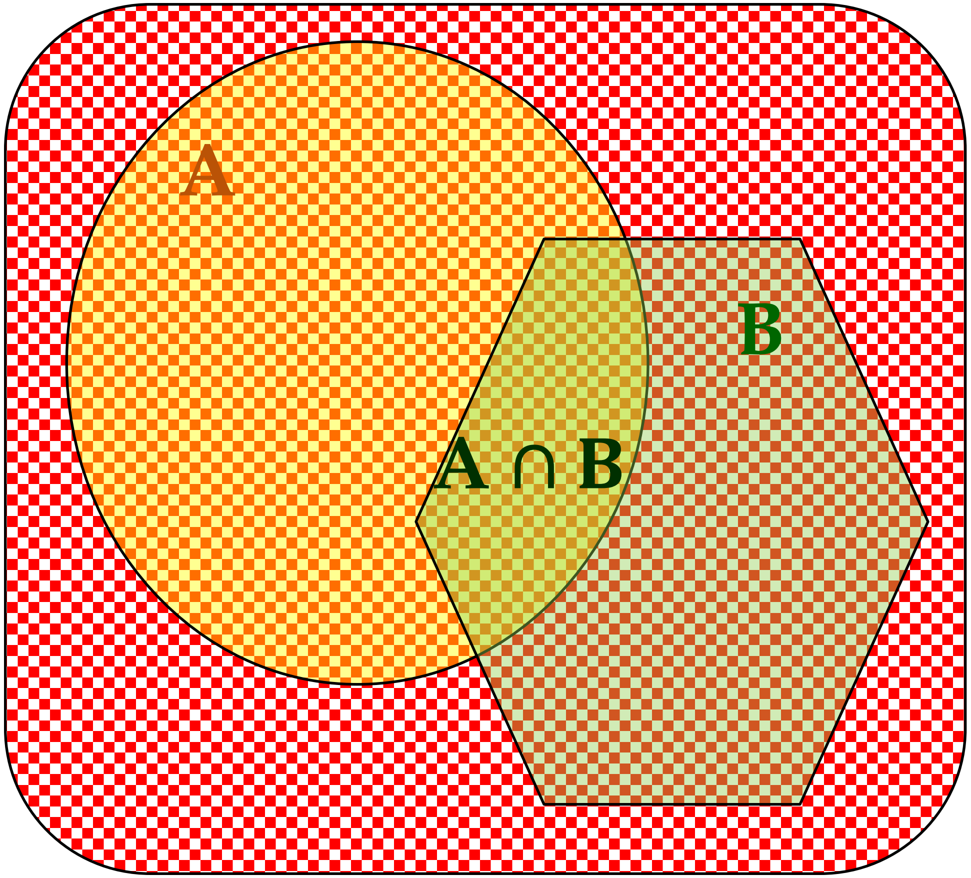
$RMS[T] = \sqrt{V[T]} = \sigma$: τυπικό μετρητικό σφάλμα (διακριτική ικανότητα)

- Ωστόσο, το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε αφορά μία μόνο μέτρηση, π.χ. κατά πόσο κάθε μέτρηση της περιόδου του εκκρεμούς είναι συμβατή με την συγκεκριμένη θεωρητική πρόβλεψη.



- **Το ερώτημα που θα πρέπει να απαντήσουμε διατυπώνεται ως εξής: τι πληροφορία εμπεριέχει μία μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους αναφορικά με την αληθή του τιμή ;**

Λίγα λόγια για πιθανότητες ...



Πιθανά γεγονότα: N→ ∞

Γεγονότα της Κατηγορίας A (N_A→ ∞)

Γεγονότα της Κατηγορίας B (N_B→ ∞)

Γεγονότα της Κατηγορίας A ∩ B ($N_{A\cap B}$)

Πιθανότητες

$$P(A)=\frac{N_A}{N},\quad P(B)=\frac{N_B}{N},\quad P(A\cap B)=\frac{N_{A\cap B}}{N}$$

Πιθανότητες υπό Συνθήκη

$$P(A|B)=\frac{N_{A\cap B}}{N_B},\quad P(B|A)=\frac{N_{A\cap B}}{N_A}$$

$$P(A|B)\mathrm{P(B)}=\frac{N_{A\cap B}}{N_B}\frac{N_B}{N}=\frac{N_{A\cap B}}{N}=\mathrm{P(A\cap B)}$$

$$P(B|A)\mathrm{P(A)}=\frac{N_{A\cap B}}{N_A}\frac{N_A}{N}=\frac{N_{A\cap B}}{N}=\mathrm{P(A\cap B)}$$

$$P(A|B)\mathrm{P(B)}=P(B|A)\mathrm{P(A)}$$

$$\boxed{P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}}$$

Θεώρημα του Bayes

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}} \quad \xrightarrow[B\to x]{A\to\mu} \quad \boxed{P(\mu|x) = \frac{P(x|\mu)P(\mu)}{P(x)}}$$

P(x | μ)=f(x;μ)dx : είναι η πιθανότητα η τιμή της μέτρησης να είναι στο διάστημα [x, x+dx] δεδομένου ότι η αληθής τιμή είναι ίση με μ. *(f(x;μ) είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των μετρήσεων που περιέχει την αληθή τιμή, μ, ως παράμετρο)*. ***ΓΝΩΣΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ***

P(μ | x)=q(μ;x)dμ : είναι η πιθανότητα η αληθής τιμή της φυσικής ποσότητας να είναι στο διάστημα [μ, μ+dμ] δεδομένου ότι μία μέτρηση μας έδωσε τιμή x. *(q(μ;x) είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ώστε κάθε πραγματικός αριθμός στο διάστημα τιμών Ω=[a,b] να είναι η αληθής τιμή του φυσικού μεγέθους. Η συνάρτηση q περιέχει την τιμή της μέτρησης, x, ως παράμετρο.)* ***ΑΓΝΩΣΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ***

P(μ)= u(μ)dμ : είναι η πιθανότητα που προσάπτουμε (πριν την εκτέλεση οποιασδήποτε μέτρησης) στην τιμή μ να είναι η αληθής τιμή της φυσικής ποσότητας (π.χ. εάν θα θέλαμε να αξιοποιήσουμε τα αποτελέσματα ενός άλλου πειράματος – «υποκειμενική πιθανότητα).

Για να είμαστε εντελώς απροκατάληπτοι θα θεωρήσουμε ότι κάθε «επιτρεπτή» τιμή μπορεί να είναι η αληθής τιμή του φυσικού μεγέθους, συνεπώς: **P(μ)= Cdμ , όπου C είναι σταθερά** (π.χ. εάν το διάστημα επιτρεπτών τιμών είναι το [α,β] τότε C=1/ (b-a))

$$q(\mu;x)\mathrm{d}\mu = \frac{f(x;\mu)dx\, u(\mu)d\mu}{\underbrace{\mathrm{P}(x)}_{\left[\int_{\Omega_\mu} f(x;\mu)u(\mu)d\mu\right]dx}} = \frac{f(x;\mu)\mathrm{C}dx\, d\mu}{C\left[\int_{\Omega_\mu} f(x;\mu)d\mu\right]dx} = \frac{f(x;\mu)d\mu}{\left[\int_{\Omega_\mu} f(x;\mu)d\mu\right]}$$

Εκφράσαμε την άγνωστη pdf (q(μ;x)) με γνωστούς όρους

$$q(\mu;x)\mathrm{d}\mu = \frac{f(x;\mu)d\mu}{\left[\int_{\Omega_\mu} f(x;\mu)d\mu\right]}$$

τι πληροφορία εμπεριέχει μία μέτρηση (x=m) ενός φυσικού μεγέθους αναφορικά με την αληθή του τιμή (μ) ;

- Γνωρίζουμε ότι οι μετρήσεις συμπεριφέρονται ως τυχαίες μεταβλητές και περιγράφονται από την pdf f(x;μ).
- Γνωρίζουμε επίσης ότι $$q(\mu; x)\mathrm{d}\mu = \frac{f(x;\mu)d\mu}{\left[\int_{\Omega_\mu} f(x;\mu)d\mu\right]}$$

Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι: ας υποθέσουμε πως οι μετρήσεις ενός φυσικού μεγέθους ακολουθούν Gaussian pdf, με μέση τιμή την αληθή τιμή τιμή του φυσικού μεγέθους (μ) και με τετραγωνική διασπορά ίση με σ^2 (η τιμή του σ εξαρτάται από την μετρητική διαδικασία και την ακρίβεια των οργάνων)

$$f(x;\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(\mu-x)^2}{2\sigma^2}}$$

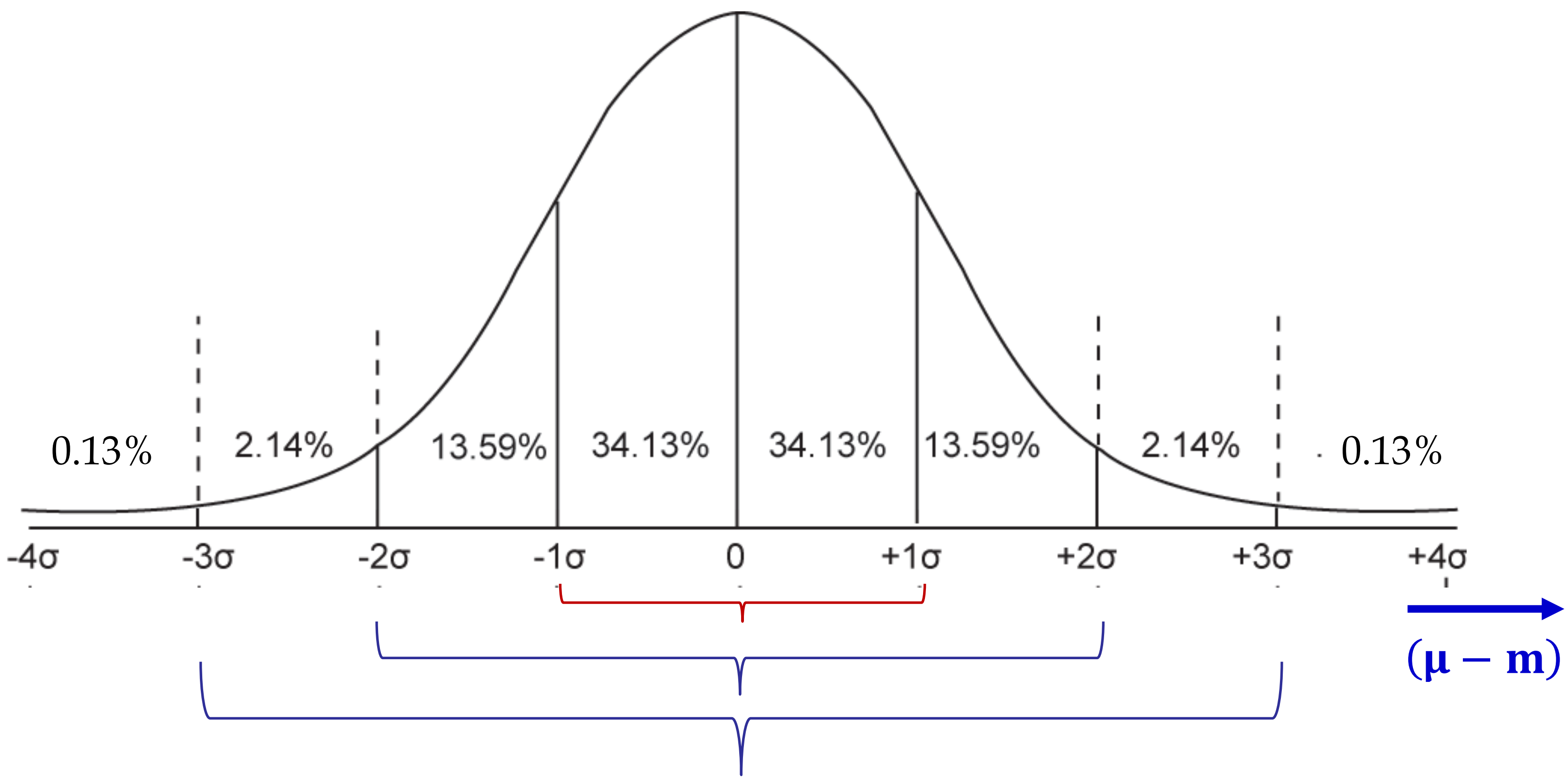
Έστω ότι μία μέτρηση του φυσικού μεγέθους μας έδωσε x=m

$$q(\mu;x)\mathrm{d}\mu = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(\mu-m)^2}{2\sigma^2}}d\mu}{\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(\mu-m)^2}{2\sigma^2}}d\mu}_{\substack{1 \\ \lambda\acute{o}\gamma\omega\ \sigma\upsilon\mu\mu\varepsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha\varsigma\ m\leftrightarrow\mu}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(\mu-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\mu$$

Η αληθής τιμή κατανέμεται γύρω από την μέτρηση ακολουθώντας Gaussian συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(\mu-m)^2}{2\sigma^2}}d\mu$$

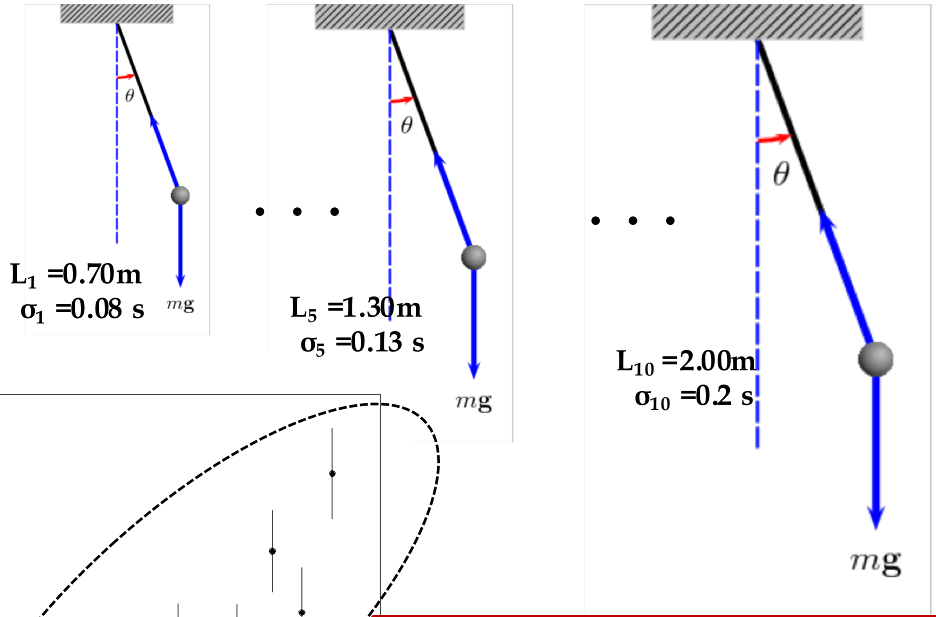
Αποτέλεσμα μέτρησης φυσικού μεγέθους: m
Περιοχή (ή διάστημα) εμπιστοσύνης : $\mu \in [a, b]$
Περιεχόμενο πιθανότητας του διαστήματος εμπιστοσύνης: $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(\mu-m)^2}{2\sigma^2}}d\mu$

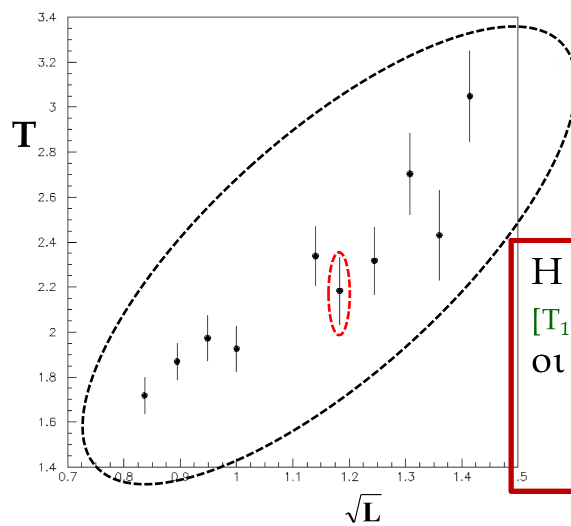


Συνήθως γράφουμε το αποτέλεσμα της μέτρησης ως: $m \pm \sigma$

Εκτίμηση Παραμέτρων
(έμμεση μέτρηση)

α/α	L (m)	σ (s)	T(s)
1	0.70	0.08	1.72
2	0.80	0.08	1.87
3	0.90	0.10	1.97
4	1.00	0.10	1.93
5	1.30	0.13	2.34
6	1.40	0.15	2.18
7	1.55	0.15	2.32
8	1.71	0.18	2.70
9	1.85	0.20	2.43
10	2.00	0.20	3.05





Η πιθανότητα οι ανεξάρτητες μετρήσεις να είναι: $[T_1,\ T_1+dT_1]$, $[T_2,\ T_2+dT_2]$ ..., $[T_{10},\ T_6+dT_6]$, δεδομένου ότι οι παράμετροι έχουν τιμές ίσες με α και b, είναι:

$$P(T_1,\dots T_{10}|a,b) = \prod_{i=1}^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{\frac{-(T_i-[a+bx_i])^2}{2\sigma_i^2}} \mathrm{d}T_1 \dots \mathrm{d}T_{10}$$

Θεωρητική Πρόβλεψη

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

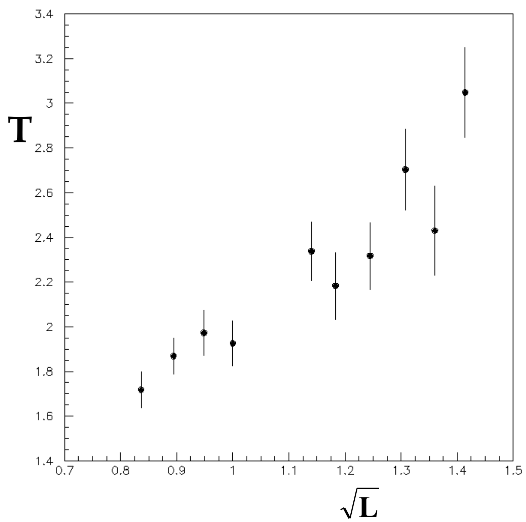
Θα εξετάσουμε την «Υπόθεση»: $T = a + b\sqrt{L}$

- **Θα εκτιμήσουμε τις τιμές για το (α,b) από τα πειραματικά δεδομένα**
- **Σύμφωνα με τη Θεωρία θα πρέπει: $a_\alpha=0$ και $b_\alpha=2\pi/(g)^{1/2}$**

Η πιθανότητα η μέτρηση της περιόδου του 6ου εκκρεμούς να είναι $[T_6,\ T_6+dT_6]$ δεδομένου ότι οι παράμετροι έχουν τιμές ίσες με α και b

$$\mathrm{P}(T_6|a,b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_6} e^{\frac{-\left(T_6-\left[a+b\,\overbrace{\sqrt{L_6}}^{x_6}\right]\right)^2}{2\sigma_6^2}} \mathrm{d}T_6$$

α/α	L (m)	σ (s)	T(s)
1	0.70	0.08	1.72
2	0.80	0.08	1.87
3	0.90	0.10	1.97
4	1.00	0.10	1.93
5	1.30	0.13	2.34
6	1.40	0.15	2.18
7	1.55	0.15	2.32
8	1.71	0.18	2.70
9	1.85	0.20	2.43
10	2.00	0.20	3.05



Η πιθανότητα οι ανεξάρτητες μετρήσεις να είναι: $[T_1, T_1+dT_1]$, $[T_2, T_2+dT_2]$ ..., $[T_{10}, T_6+dT_6]$, δεδομένου ότι οι παράμετροι έχουν τιμές ίσες με α και b, είναι:

$$\boldsymbol{P(T_1,\ldots T_{10}|a,b) = \prod_{i=1}^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{\frac{(T_i-[a+bx_i])^2}{2\sigma_i^2}} dT_1 \ldots dT_{10}}$$

Εκτίμηση των τιμών των παραμέτρων α και b : Αναζητούμε τις εκείνες τις τιμές των παραμέτρων $(\hat{a}\ \ \kappa\alpha\iota\ \hat{b})$ οι οποίες μεγιστοποιούν την συνάρτηση «πιθανοφάνειας» (likelihood):

$$\mathcal{L}(T_1,\ldots T_{10};a,b) = \prod_{i=1}^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{\frac{-(T_i-[a+bx_i])^2}{2\sigma_i^2}}$$

(Υπενθύμιση: $x_i = \sqrt{L_i}$)

Ισοδύναμα: Αναζητούμε τις εκείνες τις τιμές των παραμέτρων $(\hat{a}\ \ \kappa\alpha\iota\ \hat{b})$ οι οποίες ελαχιστοποιούν τον αρνητικό λογάριθμο της συνάρτηση «πιθανοφάνειας» (likelihood):

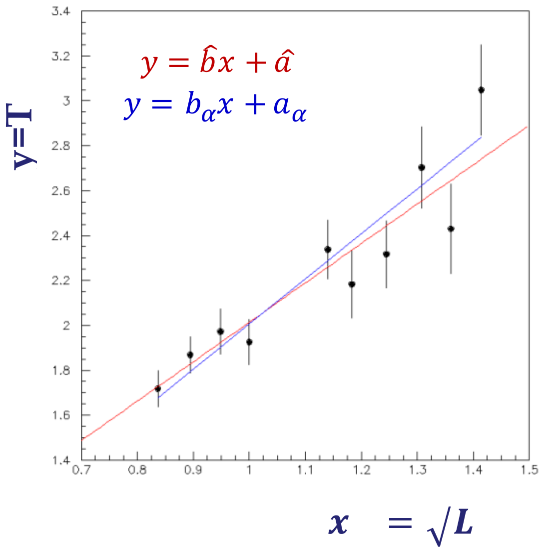
$$-\ln(\mathcal{L}(T_1,\ldots T_{10};a,b)) = \underbrace{-\sum_{i=1}^{10} ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\right)}_{\alpha\nu\varepsilon\xi\acute{\alpha}\rho\tau\eta\tau o\ \tau\omega\nu\ a\ \kappa\alpha\iota\ b} + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{10}\frac{(T_i-[a+bx_i])^2}{\sigma_i^2}}_{Q^2(T_1,\ldots T_{10};a,b)}$$

Ισοδύναμα: Αναζητούμε τις εκείνες τις τιμές των παραμέτρων $(\hat{a}\ \ \kappa\alpha\iota\ \hat{b})$ οι οποίες ελαχιστοποιούν την συνάρτηση $\boldsymbol{Q^2(T_1,\ldots T_{10};a,b)}$:

$$\boldsymbol{Q^2(T_1,\ldots T_{10};a,b) = \sum_{i=1}^{10}\frac{(T_i-[a+bx_i])^2}{\sigma_i^2}}$$

α/α	L (m)	σ (s)	T(s)
1	0.70	0.08	1.72
2	0.80	0.08	1.87
3	0.90	0.10	1.97
4	1.00	0.10	1.93
5	1.30	0.13	2.34
6	1.40	0.15	2.18
7	1.55	0.15	2.32
8	1.71	0.18	2.70
9	1.85	0.20	2.43
10	2.00	0.20	3.05

Για Γενική Χρήση: ονομάζουμε $x_i = \sqrt{L_i}$ και $y_i = T_i$, i = 1,2,3, … N (αριθμ. Σημείων) οι ποσότητες x_i μετρούνται χωρίς σφάλμα ενώ οι ποσότητές y_i μετρούνται με σφάλμα σi και ακολουθούν Gaussian pdf



Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Αναζητούμε τις εκείνες τις τιμές των παραμέτρων ($\hat{a}$ και $\hat{b}$) οι οποίες ελαχιστοποιούν την συνάρτηση :

$$Q^2(y_1, \ldots y_N; a, b) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - [a + bx_i])^2}{\sigma_i^2}$$

$$\left.\frac{\partial Q^2(y_1, \ldots y_N; a, b)}{\partial a}\right|_{\substack{a=\hat{a} \\ b=\hat{b}}} = 0$$

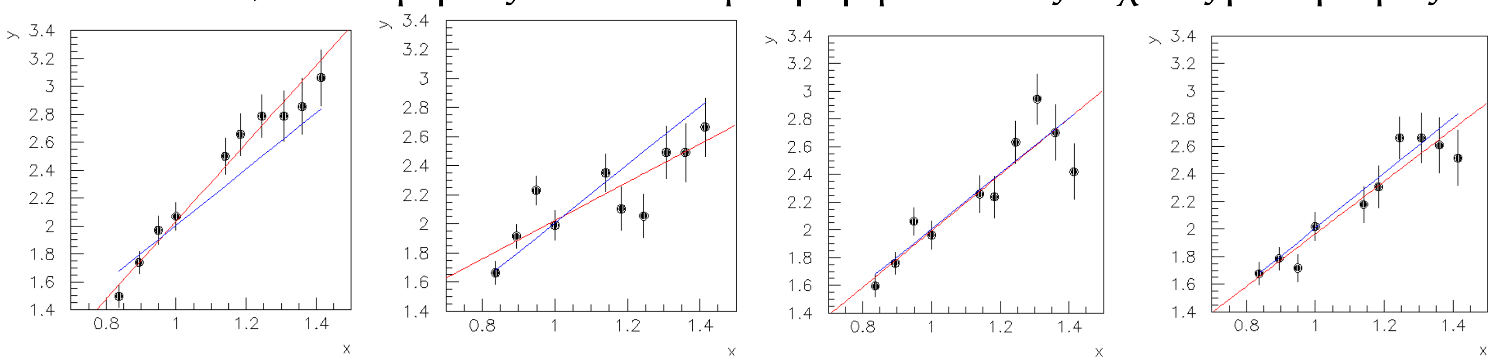
$$\left.\frac{\partial Q^2(y_1, \ldots y_N; a, b)}{\partial b}\right|_{\substack{a=\hat{a} \\ b=\hat{b}}} = 0$$

Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς: $\overline{\sigma^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}$, $\bar{x} = \overline{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}$, $\bar{y} = \overline{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{\sigma_i^2}$, $\overline{xy} = \overline{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}$, $\overline{x^2} = \overline{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}$

$$\boxed{\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \qquad \hat{b} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}}$$

Ωστόσο, οι εκτιμήσεις $\hat{b}$ και $\hat{a}$ δεν είναι οι αληθείς τιμές των παραμέτρων

Επιπλέον , οι εκτιμήσεις $\hat{b}$ και $\hat{a}$ συμπεριφέρονται ως τυχαίες μεταβλητές



$\overline{\sigma^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}$, $\bar{x} = \overline{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}$, $\bar{y} = \overline{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{y_i}{\sigma_i^2}$, $\overline{xy} = \overline{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}$, $\overline{x^2} = \overline{\sigma^2} \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}$

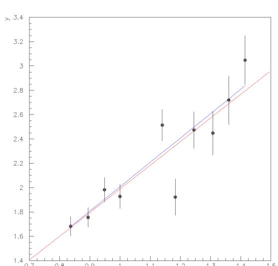
$$\boxed{\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \qquad \text{and} \qquad \hat{b} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}}$$

οι εκτιμήσεις $\hat{b}$ *και* $\hat{a}$ είναι τυχαίες μεταβλητές ως συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών

$\hat{b}$ *και* $\hat{a} \rightarrow \varphi = g(y_1, y_2, \dots, y_N)$ με $V[y_i]=\sigma_i^2$ και $\underbrace{cov[y_i, y_j]=0}_{\text{ανεξάρτητες μετρήσεις}}$ $(\mathrm{i} = 1, 2, \dots, \mathrm{N})$

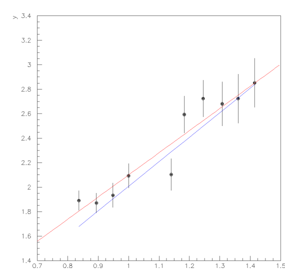
$$\mathbf{V[\varphi] \approx \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial g}{\partial y_i}\right)^2 V[y_i] + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i}^{N} \left(\frac{\partial g}{\partial y_i}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial y_j}\right) cov[y_i, y_j]}_{0}}$$

$V[\hat{a}]=\sigma_{\hat{a}}^2 = \frac{\overline{\sigma^2}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}\,\overline{x^2}$ $\quad V[\hat{b}]=\sigma_{\hat{b}}^2 = \frac{\overline{\sigma^2}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$ Εκτίμηση Σφάλματος



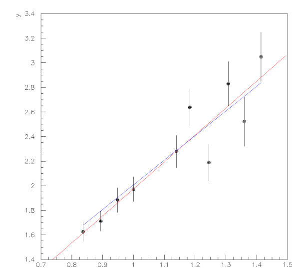
$\hat{a}$=0.042 $\sigma_{\hat{a}} = 0.220$
$\hat{b}$=1.946 $\sigma_{\hat{b}} = 0.214$

. . .



$\hat{a}$=0.289 $\sigma_{\hat{a}} = 0.220$
$\hat{b}$=1.811 $\sigma_{\hat{b}} = 0.214$

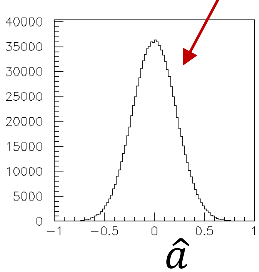
. . .

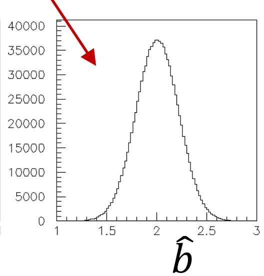


$\hat{a}$=-0.221 $\sigma_{\hat{a}} = 0.220$
$\hat{b}$=2.194 $\sigma_{\hat{b}} = 0.214$

Συνεπής Εκτίμηση Σφάλματος

1000000 πειράματα



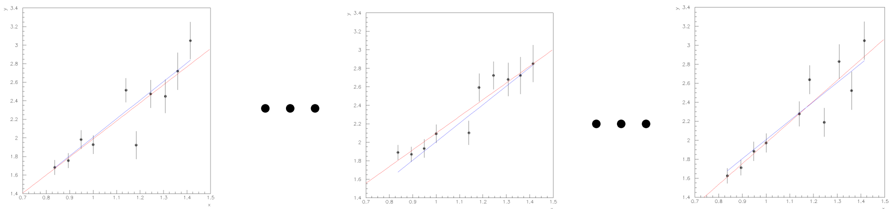


$$\left.\begin{array}{l} \langle \hat{a} \rangle = 0 = \alpha_\alpha \\ \langle \hat{b} \rangle = 2.006 = \mathrm{b}_\alpha \left(= \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right) \end{array}\right\}$$ Συνεπής Εκτίμηση Παραμέτρων

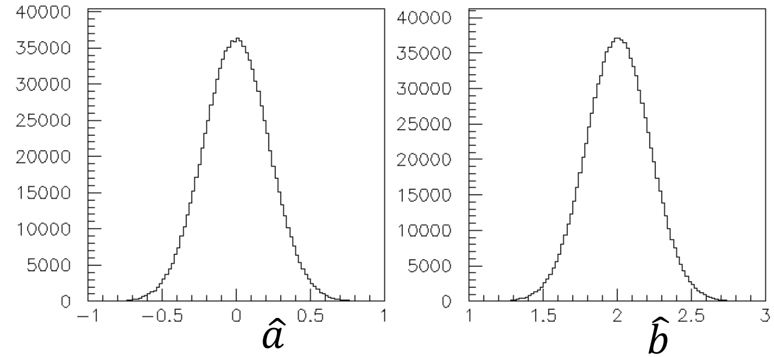
$\overline{\sigma^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}}$, $\bar{x} = \overline{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{\sigma_i^2}$, $\bar{y} = \overline{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i}{\sigma_i^2}$, $\overline{xy} = \overline{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}$, $\overline{x^2} = \overline{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}$

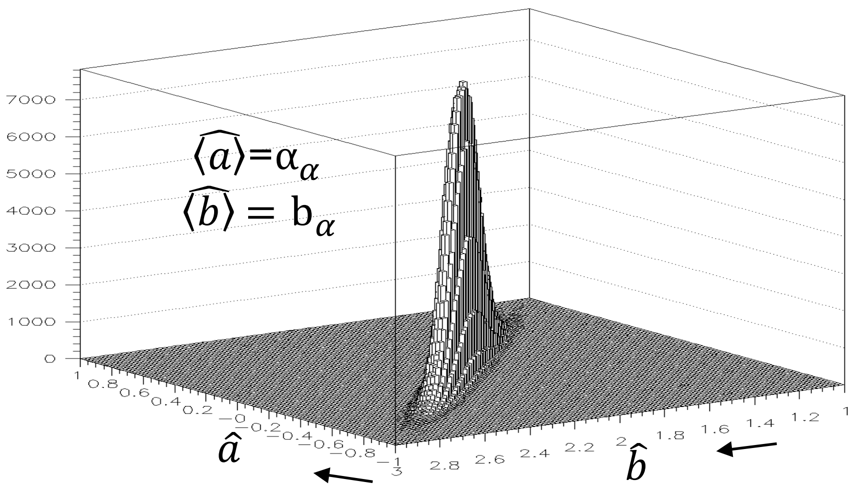
$$\boxed{\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \quad \text{and} \quad \hat{b} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}}$$

1000000 πειράματα



$V[\hat{a}] = \sigma_{\hat{a}}^2 = \frac{\overline{\sigma^2}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}\,\overline{x^2}$ $\quad V[\hat{b}] = \sigma_{\hat{b}}^2 = \frac{\overline{\sigma^2}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$





οι εκτιμήσεις $\hat{b}$ *και* $\hat{a}$ είναι **αμοιβαία εξαρτημένες**, τυχαίες μεταβλητές διότι είναι συναρτήσεις των ιδίων τυχαίων μεταβλητών $y_1, y_2, \ldots, y_N$

($V[y_i] = \sigma_i^2$ και $cov[y_i, y_j] = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$)

$\hat{a} = g(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ *και* $\hat{b} = h(y_1, y_2, \ldots, y_N)$

$$cov[\hat{a}, \hat{b}] \approx \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial g}{\partial y_i}\frac{\partial h}{\partial y}V[y_i] + \overbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}\left(\frac{\partial g}{\partial y_i}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial y_j}\right)\mathrm{cov}[y_i, y_j]}^{0}$$

$$\mathbf{cov}[\hat{a}, \hat{b}] = -\frac{\overline{\sigma^2}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}\,\bar{x}$$

Συντελεστής Συσχέτισης: $\rho = \frac{\mathbf{cov}[\hat{a},\hat{b}]}{\sqrt{V[\hat{a}]V[\hat{b}]}} = \frac{\mathbf{cov}[\hat{a},\hat{b}]}{\sigma_{\hat{a}}\sigma_{\hat{b}}} \quad (-1 \le \rho \le 1)$

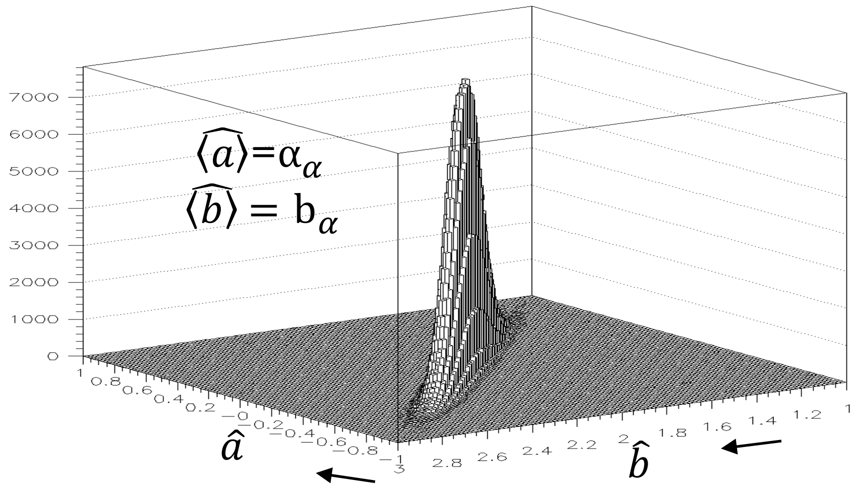
Στο παράδειγμα που μελετούμε: $\mathbf{cov}[\hat{a}, \hat{b}]$=-0.0463 και ρ=-0.986

δηλ. όταν το $\hat{a}$ εκτιμάται μεγαλύτερο της a_α το $\hat{b}$ εκτιμάται μικρότερο της b_α

Συμπέρασμα: Η σύγχρονη εκτίμηση τιμών και για τις δύο μεταβλητές (a και b) καταλήγει σε εκτιμήσεις $\hat{a}$ *και* $\hat{b}$ οι οποίες συμπεριφέρονται ως τυχαίες μεταβλητές

$\overline{\sigma^2}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}}$, $\bar{x}=\overline{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{\sigma_i^2}$, $\bar{y}=\overline{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i}{\sigma_i^2}$, $\overline{xy}=\overline{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}$, $\overline{x^2}=\overline{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}$

$$\boxed{\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x} \qquad \text{and} \qquad \hat{b}=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2}-\bar{x}^2}}$$



$$V[\hat{a}]=\sigma_{\hat{a}}^2=\frac{\overline{\sigma^2}}{\overline{x^2}-\bar{x}^2}\,\overline{x^2}$$

$$V[\hat{b}]=\sigma_{\hat{b}}^2=\frac{\overline{\sigma^2}}{\overline{x^2}-\bar{x}^2}$$

$$\mathrm{cov}[\hat{a},\hat{b}]=-\frac{\overline{\sigma^2}}{\overline{x^2}-\bar{x}^2}\,\bar{x}$$

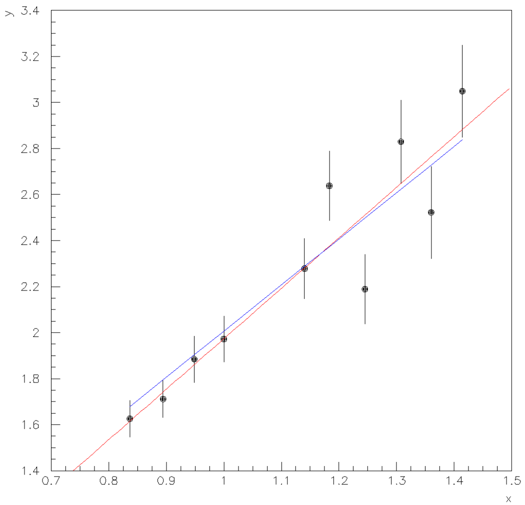
$$\rho=\frac{\mathrm{cov}[\hat{a},\hat{b}]}{\sqrt{V[\hat{a}]V[\hat{b}]}}=\frac{\mathrm{cov}[\hat{a},\hat{b}]}{\sigma_{\hat{a}}\sigma_{\hat{b}}} \qquad (-1\le\rho\le 1)$$

Εάν οι μετρήσεις (y_i i=1,2,..N) ακολουθούν Gaussian pdf (όπως συμβαίνει στο παράδειγμα που μελετούμε και συμβαίνει συνήθως) τότε και οι εκτιμήσεις $\hat{a}$ *και* $\hat{b}$ ακολουθούν δισδιάστατη Gaussian pdf. (επίσης, ανεξάρτητα από τις pdf των μετρήσεων, εάν $\mathrm{N}\to\infty$ τότε $\hat{a}$ *και* $\hat{b}$ ακολουθούν δισδιάστατη Gaussian pdf, $P(\hat{a},\hat{b})$, <u>λόγω του Θεωρήματος του Κεντρικού ορίου)</u>

$$P(\hat{a},\hat{b};a_\alpha,b_\alpha)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}\sigma_{\hat{a}}\sigma_{\hat{b}}}\,exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(a_\alpha-\hat{a})^2}{\sigma_{\hat{a}}^2}+\frac{(b_\alpha-\hat{b})^2}{\sigma_{\hat{b}}^2}-2\rho\frac{(a_\alpha-\hat{a})(b_\alpha-\hat{b})}{\sigma_{\hat{a}}\sigma_{\hat{b}}}\right]\right\}\mathrm{d}\hat{a}d\hat{b}$$

$$\langle\hat{a}\rangle=\alpha_\alpha$$
$$\langle\hat{b}\rangle=\mathrm{b}_\alpha$$

Έστω τα αποτελέσματα του πειράματος:



Εφαρμόζουμε την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και υπολογίζουμε:

$\hat{a}$=-0.221 $\sigma_{\hat{a}}$ = 0.220

$\hat{b}$=2.194 $\sigma_{\hat{b}}$ =0.214

$\mathrm{cov}[\hat{a},\hat{b}]$=-0.0463 και ρ=-0.986

Τι μπορούμε να πούμε για τις αληθείς τιμές a_α και b_α;

Εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα που αποκτήσαμε με το Θεώρημα του Bayes…

Κάθε πραγματικός αριθμός μπορεί να είναι αληθής τιμή για το a και b… **ΑΛΛΑ η πιθανότητα το ζεύγος $\{a_\alpha, b_\alpha\}$ να είναι οι πραγματικές τιμές, δεδομένου ότι η εκτίμηση μας έδωσε $\hat{a}$ και $\hat{b}$, δίνεται από:**

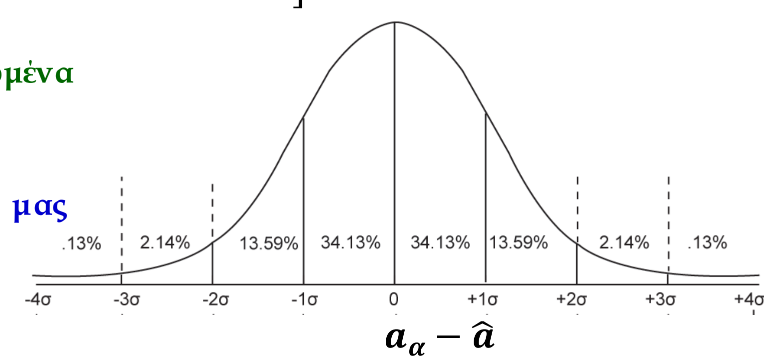
$$P(a_\alpha, b_\alpha; \hat{a}, \hat{b}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}\sigma_{\hat{a}}\sigma_{\hat{b}}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(a_\alpha-\hat{a})^2}{\sigma_{\hat{a}}^2} + \frac{(b_\alpha-\hat{b})^2}{\sigma_{\hat{b}}^2} - 2\rho\frac{(a_\alpha-\hat{a})(b_\alpha-\hat{b})}{\sigma_{\hat{a}}\sigma_{\hat{b}}}\right]\right\} \mathrm{d}a_\alpha db_\alpha$$

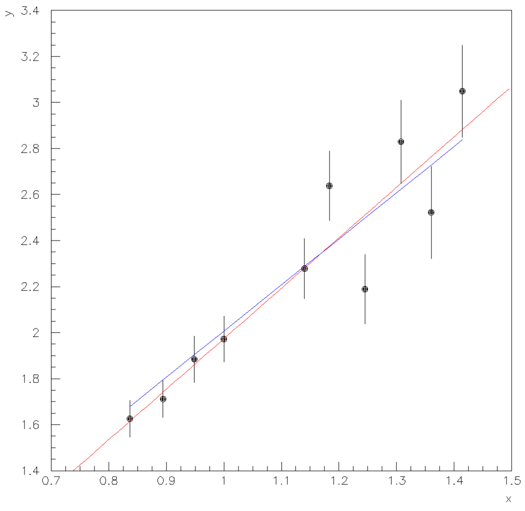
Εάν μας ενδιαφέρει μόνο μία παράμετρος... Αληθής τιμή του a μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός με πιθανότητα:

$$P(a_\alpha; \hat{a}) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}\sigma_{\hat{a}}\sigma_{\hat{b}}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(a_\alpha-\hat{a})^2}{\sigma_{\hat{a}}^2} + \frac{(b_\alpha-\hat{b})^2}{\sigma_{\hat{b}}^2} - 2\rho\frac{(a_\alpha-\hat{a})(b_\alpha-\hat{b})}{\sigma_{\hat{a}}\sigma_{\hat{b}}}\right]\right\} \mathrm{d}a_\alpha\right] db_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\hat{a}}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(a_\alpha-\hat{a})^2}{\sigma_{\hat{a}}^2}\right]\right\} da_\alpha$$

Η θεωρία προβλέπει a_α=0 και από τα πειραματικά μας δεδομένα εκτιμήσαμε -0.221$\pm$0.220

Η θεωρία προβλέπει $b_\alpha=\frac{2\pi}{\sqrt{g}}$=2.006 και από τα πειραματικά μας δεδομένα εκτιμήσαμε 2.194 ± 0.214





Εφαρμόζουμε την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και υπολογίζουμε:

$\hat{a}$=-0.221 $\sigma_{\hat{a}}$ = 0.220
$\hat{b}$=2.194 $\sigma_{\hat{b}}$ =0.214
$\mathrm{cov}[\hat{a},\hat{b}]$=-0.0463 και ρ=-0.986

Ποια είναι η τιμή του g;

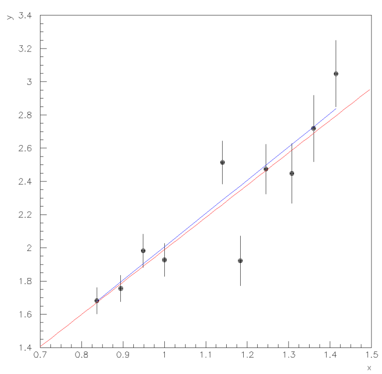
$$b_\alpha=\frac{2\pi}{\sqrt{g}} \Longrightarrow g=\frac{(2\pi)^2}{b_\alpha^2} \quad\rightarrow\quad \hat{g}=\frac{(2\pi)^2}{(\hat{b})^2}=8.2$$

$$\sigma_{\hat{g}}=\sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial\hat{b}}\frac{(2\pi)^2}{\hat{b}^2}\right)^2\sigma_{\hat{b}}^2}=1.6$$

8.2 ± 1.6 m s^{-2} (9.81 m s^{-2})

Έστω τα αποτελέσματα ενός δεύτερου πειράματος:

Κάθε εκτίμηση συμπεριφέρεται ως τυχαία μεταβλητή



$\hat{a}$=0.042 $\sigma_{\hat{a}}$ = 0.220
$\hat{b}$=1.946 $\sigma_{\hat{b}}$ =0.214

10.42 ± 2.3 m s^{-2} (9.81 m s^{-2})

Τι στατιστικές ιδιότητες έχει το $\hat{g}$;
Συνάρτηση πιθανότητας
Μέση τιμή και τετραγωνική διασπορά

Κάθε πραγματικός αριθμός μπορεί να είναι αληθής τιμή για το a και b… **ΑΛΛΑ η πιθανότητα το ζεύγος $\{a_\alpha, b_\alpha\}$ να είναι οι πραγματικές τιμές, δεδομένου ότι η εκτίμηση μας έδωσε $\hat{a}$ και $\hat{b}$, δίνεται από:**

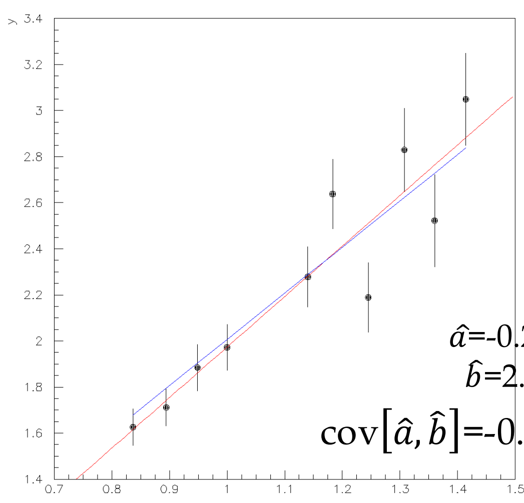
$$P(a_\alpha, b_\alpha; \hat{a}, \hat{b}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}\sigma_{\hat{a}}\sigma_{\hat{b}}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(a_\alpha-\hat{a})^2}{\sigma_{\hat{a}}^2} + \frac{(b_\alpha-\hat{b})^2}{\sigma_{\hat{b}}^2} - 2\rho\frac{(a_\alpha-\hat{a})(b_\alpha-\hat{b})}{\sigma_{\hat{a}}\sigma_{\hat{b}}}\right]\right\} da_\alpha db_\alpha$$

Εάν μας ενδιαφέρουν και οι δύο παράμετροι…

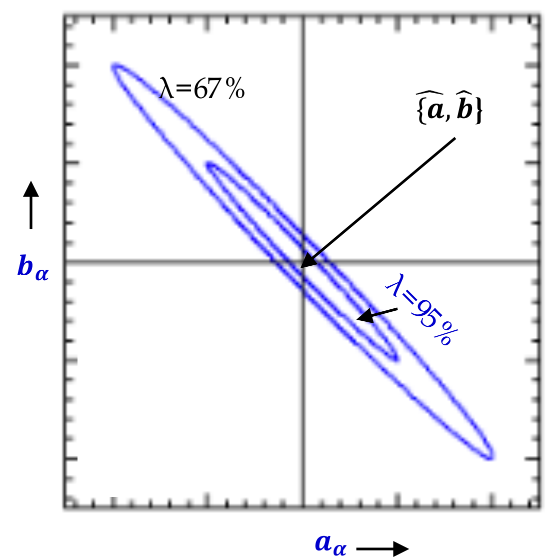
Αναζητούμε μία συμμετρική περιοχή (Ω) γύρω από την εκτίμηση $\widehat{\{a, b\}}$ τέτοια ώστε να υπάρχει πιθανότητα λ (π.χ. 67%) οι αληθείς τιμές να ευρίσκονται σε αυτή την περιοχή

$$\lambda = \iint_\Omega \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}\sigma_{\hat{a}}\sigma_{\hat{b}}} exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(a_\alpha-\hat{a})^2}{\sigma_{\hat{a}}^2} + \frac{(b_\alpha-\hat{b})^2}{\sigma_{\hat{b}}^2} - 2\rho\frac{(a_\alpha-\hat{a})(b_\alpha-\hat{b})}{\sigma_{\hat{a}}\sigma_{\hat{b}}}\right]\right\} da_\alpha db_\alpha$$

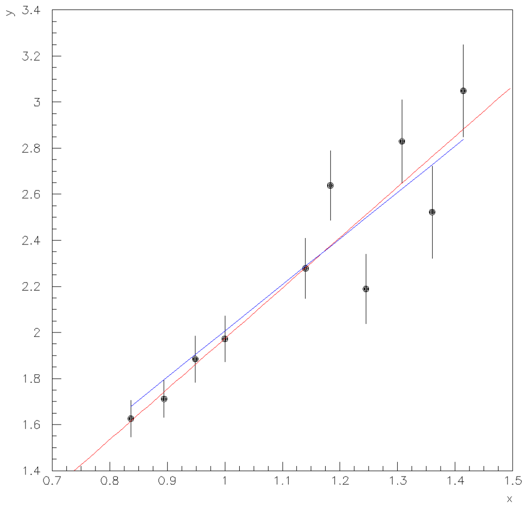
$$\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(a_\alpha-\hat{a})^2}{\sigma_{\hat{a}}^2} + \frac{(b_\alpha-\hat{b})^2}{\sigma_{\hat{b}}^2} - 2\rho\frac{(a_\alpha-\hat{a})(b_\alpha-\hat{b})}{\sigma_{\hat{a}}\sigma_{\hat{b}}}\right] \le C_\lambda$$



$\hat{a}$=-0.221 $\sigma_{\hat{a}}$ = 0.220
$\hat{b}$=2.194 $\sigma_{\hat{b}}$ =0.214
cov$[\hat{a}, \hat{b}]$=-0.0463 και ρ=-0.986



Εάν οι μετρήσεις ακολουθούν Gaussian pdf s

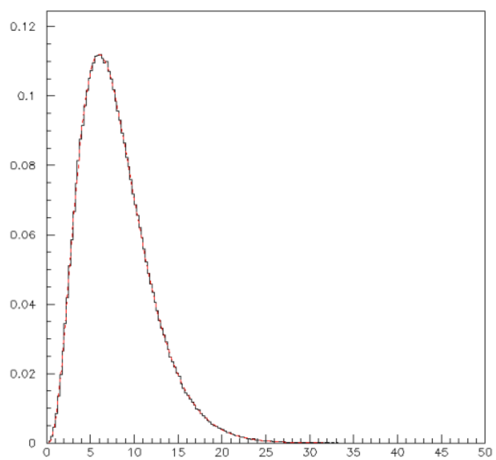


$$Q^2(y_1, \dots y_N; a, b) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - [a + b x_i])^2}{\sigma_i^2}$$

$\hat{a}$=-0.221 $\sigma_{\hat{a}}$ = 0.220
$\hat{b}$=2.194 $\sigma_{\hat{b}}$ =0.214
cov$[\hat{a}, \hat{b}]$=-0.0463 και ρ=-0.986

$$Q^2_{min} = Q^2(y_1, \dots y_N; \hat{a}, \hat{b}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - [\hat{a} + \hat{b} x_i])^2}{\sigma_i^2}$$

Αριθμός Βαθμών Ελευθερίας (k)= αριθμός δεδομένων – αριθμός παραμέτρων
Το Q^2_{min} είναι τυχαία μεταβλητή



1000000
Πειράματα
k=10-2=8
βαθμοί
ελευθερίας

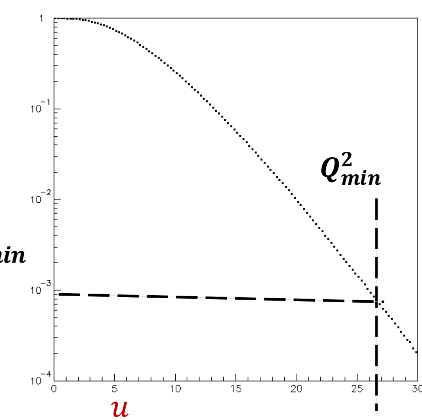
Αποδεικνύεται ότι: εάν οι μετρήσεις ακολουθούν Gaussian pdf τότε η πιθανότητα μία εκτίμηση να αντιστοιχεί σε Q^2_{min} δίνεται από την (λεγόμενη) χ^2 συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για k βαθμούς ελευθερίας

$$\chi^2(Q^2_{min}; k) = \frac{1}{2^{k/2}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left[Q^2_{min}\right]^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{Q^2_{min}}{2}}$$

$$\langle Q^2_{min} \rangle = k$$

$$V[Q^2_{min}] = 2k$$

$$P(Q^2_{min} \geq u) = \int_u^{\infty} \chi^2(Q^2_{min}; k)\, dQ^2_{min}$$

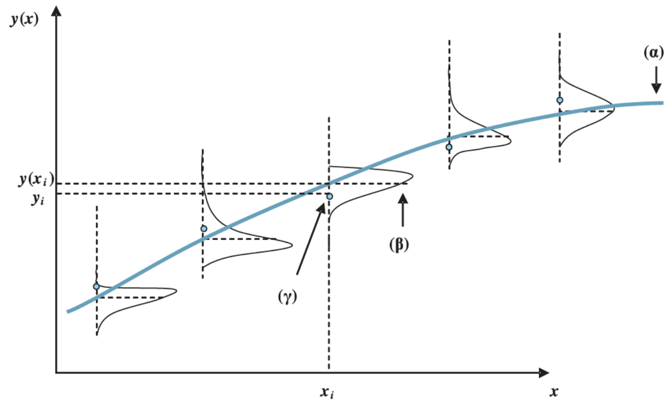


Πρακτικά ανησυχούμε εάν Q^2_{min}>>k

Ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων

$Q^2(y_1, \ldots y_N;\ a_1, a_2 \ldots, a_k) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(y_i - h(x_i;\, a_1, a_2 \ldots, a_k)\right)^2}{\sigma_i^2}$ όπου $h(x\ ;\ a_1, a_2, a_3) = a_1 \sin(a_2 x + a_3)$

ορίζεται για κάθε «πρότυπο προσαρμογής», έστω και εάν οι μετρήσεις $y_1, \ldots y_N$ ΔΕΝ ακολουθούν Gaussian συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας



Σχήμα 6.10

Γραφική παράσταση του προτύπου (6.102) (α). Οι καμπύλες (β) παριστούν γραφικά τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των μετρήσεων y_i. Τα σημεία (γ) παριστούν τις μετρήσεις $\{y_i, x_i\}$.

Ορίζεται ακόμη και στην περίπτωση όπου οι μετρήσεις $y_1, \ldots y_N$ είναι αμοιβαία εξαρτημένες

Επισημαίνεται πως οι ιδιότητες των εκτιμητών που αναφέραμε (π.χ. ότι $Q_{min}^2 = Q^2(y_1, \ldots y_N; \hat{a}, \hat{b})$ ακολουθεί την $\chi^2(Q_{min}^2; k) = \frac{1}{2^{k/2}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left[Q_{min}^2\right]^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{Q_{min}^2}{2}}$ pdf) για Gaussian μετρήσεις.