

Θερμιονική Εκπομπή Ηλεκτρονίων

Φορτίο εκπέμπεται από «ζεστά» μέταλλα

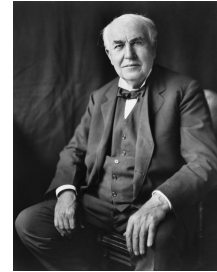
1853 by Edmond Becquerel

1873 by Frederick Guthrie

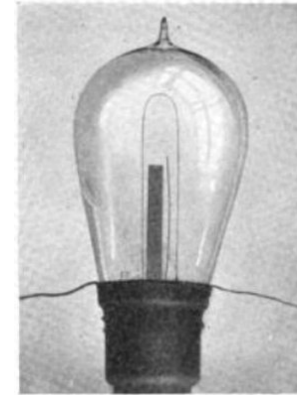
1869–1883 Johann Wilhelm Hittorf

1885 Eugen Goldstein

1882–1889 Julius Elster and Hans Friedrich Geitel

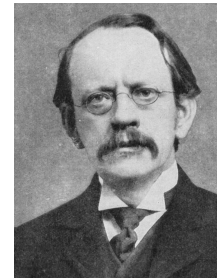


Thomas Alva Edison (1880)

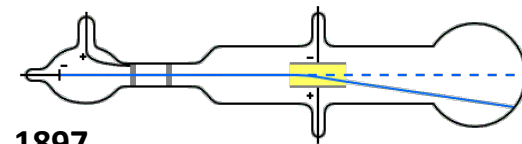


$$J = \frac{4\pi q_e m (kT)^2}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left[\frac{-W}{kT}\right]$$

κβαντική περιγραφή του
Μικρόκοσμου



Joseph John Thomson

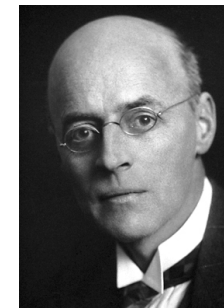


1897



1928

"for his work on the thermionic phenomenon and especially for the discovery of the law named after him"

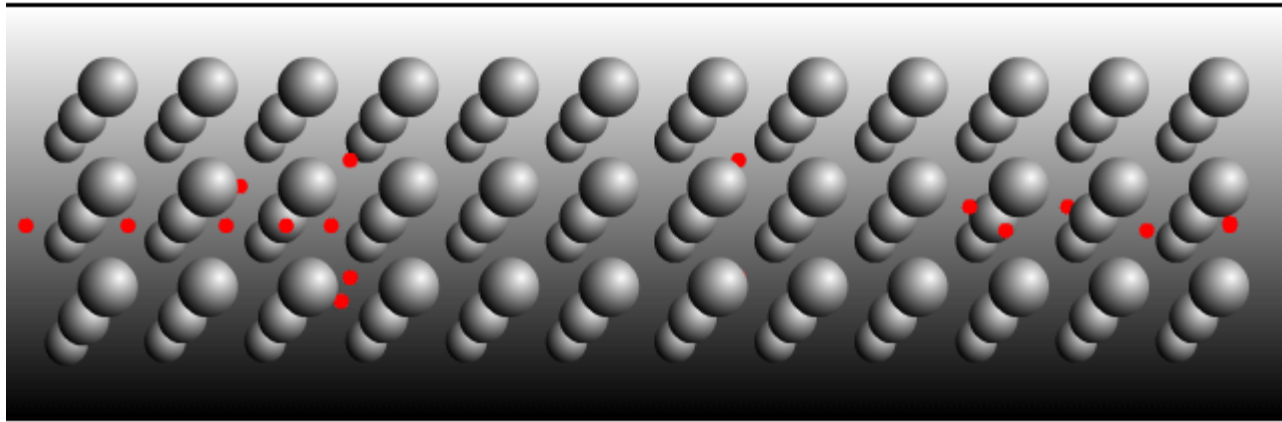


Owen Willans Richardson

1901

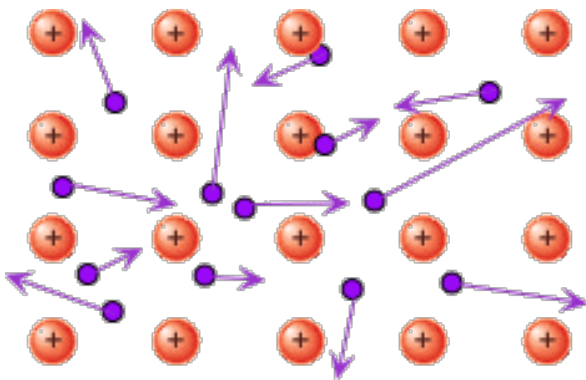
$$J = A_G T^2 e^{-\frac{W}{kT}}$$

Νέφος ηλεκτρονίων στο μεταλλικό πλέγμα

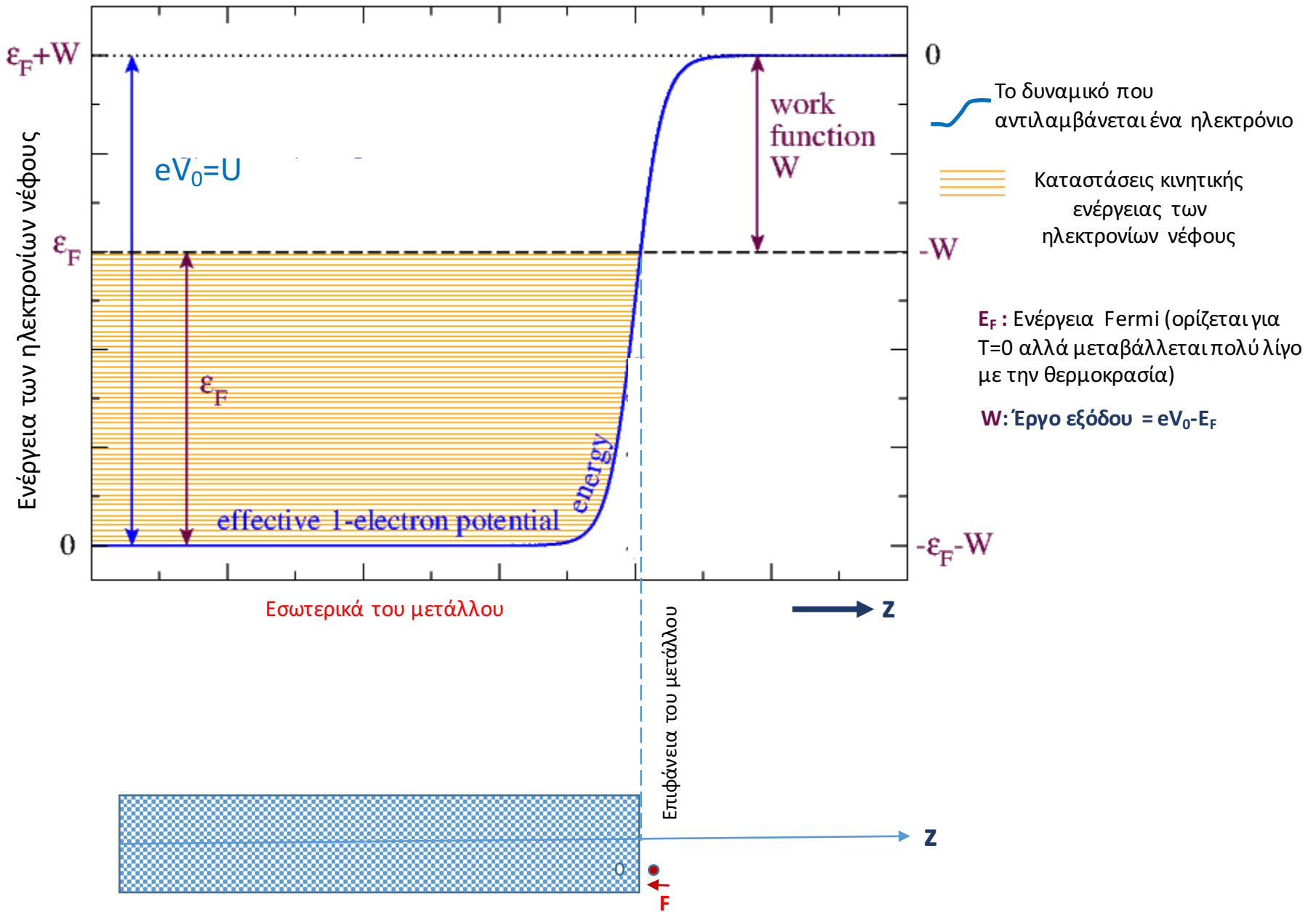


• Ελεύθερα ηλεκτρόνια

● άτομα



- Τα ηλεκτρόνια δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους
- Κινούνται σε περιοχή μηδενικού δυναμικού (όπως ένα σωματίο παγιδευμένο σε κουτί)
- Οι ενεργειακές τους καταστάσεις καθορίζονται από τις «οριακές συνθήκες» που επιβάλλει το μεταλλικό πλέγμα



Έστω μία διαθέσιμη κατάσταση ενέργειας, E , για τις δομικές μονάδες ενός αερίου που βρίσκεται σε (απόλυτη) θερμοκρασία T . Σύμφωνα με την κλασική φυσική, η πιθανότητα μία δομική μονάδα (π.χ. ένα ηλεκτρόνιο σε νέφος ηλεκτρονίων) να ευρίσκεται σε αυτή την ενεργειακή κατάσταση είναι ανάλογη του $e^{-\frac{E}{kT}}$, όπου $k=8.62 \cdot 10^{-5}$ eV/K (σταθερά Boltzmann).

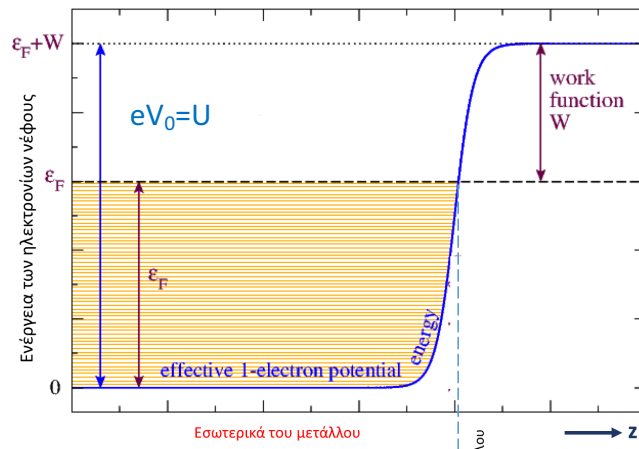
Η στατιστική κατανομή ενεργειών **Maxwell-Boltzmann** μπορεί να εφαρμόζεται με την προϋπόθεση ότι η μέση απόσταση μεταξύ των δομικών μονάδων (d) παραμένει μεγαλύτερη από το (κατά De Broglie) μήκος κύματος τους ($\lambda=h/p$). Σε αντίθετη περίπτωση θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ο κυματικός τους χαρακτήρας και να περιγράφονται κβαντομηχανικά.

π.χ. σε αραιά νέφη ηλεκτρονίων (d μεγάλο) και σε μεγάλες θερμοκρασίες (όπου $E=3kT/2$ είναι μεγάλη και συνεπώς και η ορμή μεγάλη άρα το λ μικρό) η κατανομή ενεργειών Maxwell-Boltzmann αποτελεί καλή προσέγγιση

Τα ηλεκτρόνια του νέφους ηλεκτρονίων χρήζουν κβαντομηχανικής περιγραφής. Στο πλαίσιο της κβαντομηχανικής περιγραφής, διαδραματίζουν πρωτεύοντα ρόλο τα ακόλουθα δύο χαρακτηριστικά:

- Τα ηλεκτρόνια είναι Fermions (spin $\frac{1}{2}$) και ως εκ τούτου δεσμεύονται από την απαγορευτική αρχή του Pauli
- Οι ενεργειακές τους καταστάσεις είναι διακριτές

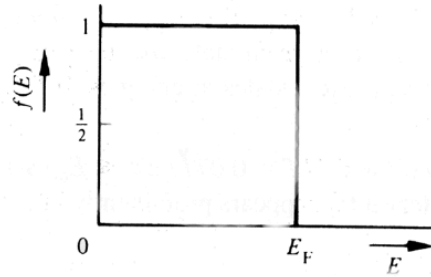
Η πιθανότητα κατάληψης της ενεργειακής κατάστασης E δίνεται από την συνάρτηση πιθανότητας Fermi-Dirac



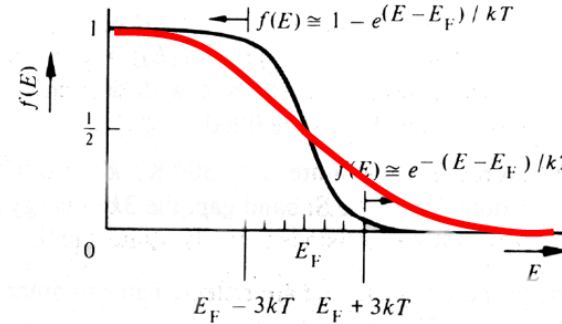
$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{(E-E_F)}{kT}}}$$

Κατανομή Fermi-Dirac

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{(E-E_F)/kT}}$$

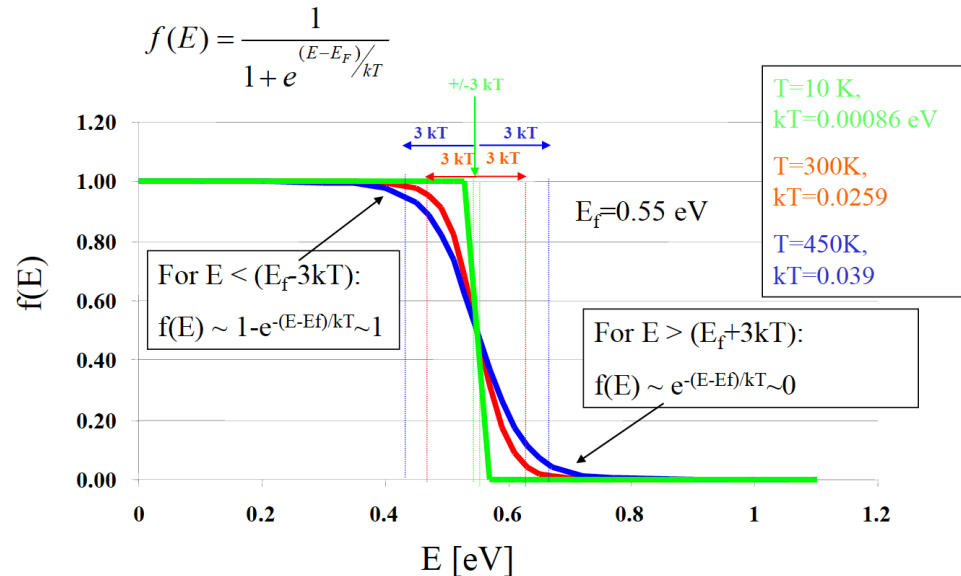


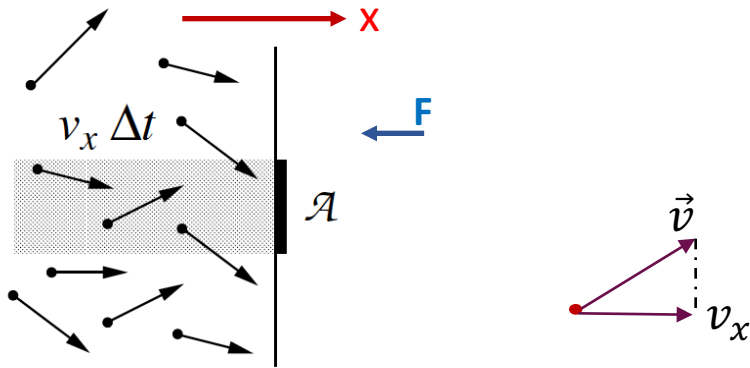
(a) $T \rightarrow 0 \text{ K}$



(b) $T > 0 \text{ K}$

- Για $T=0$, η πιθανότητα να είναι κατειλημμένη μία ενεργειακή στάθμη γίνεται «συνάρτηση βήματος». Όλες οι στάθμες με ενέργεια μικρότερη της ενέργειας Fermi είναι κατειλημμένες και οι υπόλοιπες είναι άδειες.
- Για $T>0$, ενεργειακές στάθμες με $E>E_F$ γεμίζουν ενώ αδειάζουν καταστάσεις με $E<E_F$. Προσέξτε ότι οι μεταβολές γίνονται σε ενεργειακές περιοχές γύρω από το E_F
- Πάντα $f(E_F)=1/2$





$$\frac{1}{2} m v_x^2 \geq U$$

$$v_x \geq \sqrt{\frac{2U}{m}}$$

Σε χρόνο Δt , τα ηλεκτρόνια που έχουν οριζόντιες ταχύτητες ώστε $v_x \geq \sqrt{\frac{2U}{m}}$ θα εξέλθουν από την επιφάνεια \mathcal{A} του μετάλλου, ανεξάρτητα από το μέγεθος της εγκάρσιας συνιστώσας της ταχύτητας (v_y, v_z)

Εάν η πυκνότητα (αριθμός ανά μονάδα όγκου) ηλεκτρονίων του μετάλλου με ταχύτητα $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ είναι $\rho(v_x, v_y, v_z)$ τότε σε χρόνο Δt , από την επιφάνεια \mathcal{A} , θα εξέρχονται $\int_{\sqrt{\frac{2U}{m}}}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \rho(v_x, v_y, v_z) (v_x \Delta t) \mathcal{A} dv_x dv_y dv_z$

(οι εγκάρσιες απώλειες εξισορροπούνται)

Επειδή $E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$, το ποσοστό των ηλεκτρονίων του μετάλλου που έχουν ταχύτητα v είναι:

$$f(v_x, v_y, v_z) = \frac{1}{1 + \exp\left[\left(\frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - E_F\right) / kT\right]}$$

Ωστόσο, υπάρχουν πολλοί τρόποι (καταστάσεις ηλεκτρονίων) ώστε ένα ένα ηλεκτρόνιο να έχει ενέργεια $E = \frac{1}{2} m v^2$ (π.χ. $v_x = v$ και $v_y = 0$ $v_z = 0$ ή $v_x = 0$ και $v_y = v$ $v_z = 0$ κτλ). Έστω ότι, ανά μονάδα όγκου του μετάλλου, υπάρχουν $h(v)$ καταστάσεις ηλεκτρονίων με ταχύτητα v (ή ενέργεια $E = \frac{1}{2} m v^2$).

Τότε η πυκνότητα (αριθμός ανά μονάδα όγκου) ηλεκτρονίων του μετάλλου με ταχύτητα $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ είναι

$$\rho(v_x, v_y, v_z) = h(v) \frac{1}{1 + \exp\left[\left(\frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - E_F\right) / kT\right]}$$

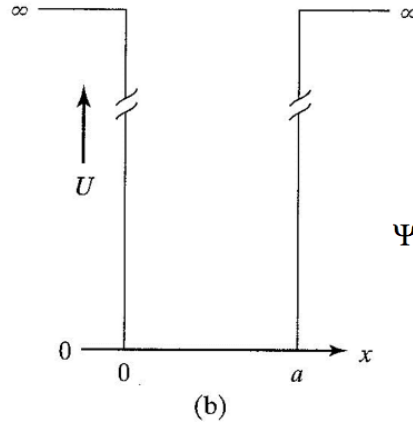
Πόσες καταστάσεις, $h(v)$, είναι διαθέσιμες για ένα “ελεύθερο” ηλεκτρόνιο μετάλλου με καθορισμένη Κινητική Ενέργεια (ταχύτητα);

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\Psi = E\Psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - E\Psi = 0$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + k^2\Psi = 0$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

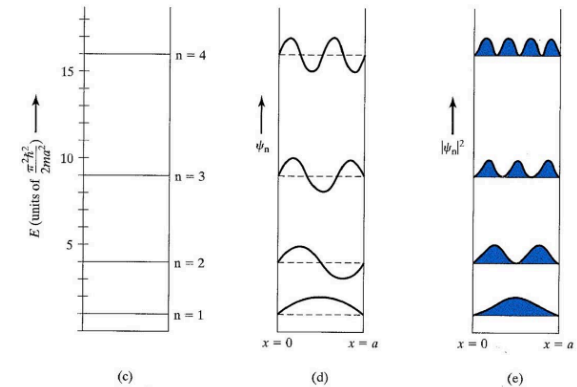


$$\Psi_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \text{ and } E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

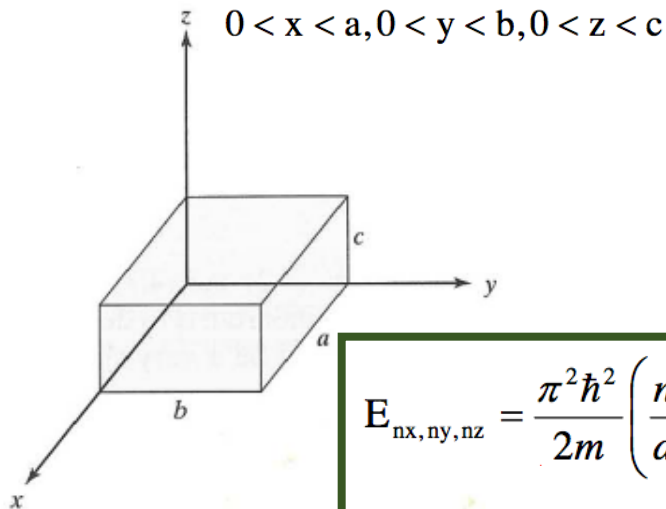
Οριακές Συνθήκες

$$\Psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Psi(a) = 0 \Rightarrow A\sin(ka) = 0 \Rightarrow k = \frac{n\pi}{a} \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$



Το «ελεύθερο» e σε ένα μέταλλο είναι παγιδευμένο σε τρισδιάστατο «κιβώτιο»



$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V\right)\Psi = E\Psi \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\Psi(x, y, z) = \Psi_x(x)\Psi_y(y)\Psi_z(z)$$

$$\frac{1}{\Psi_x(x)}\frac{\partial^2\Psi_x(x)}{\partial x^2} + k_x^2 = 0, \quad \frac{1}{\Psi_y(y)}\frac{\partial^2\Psi_y(y)}{\partial y^2} + k_y^2 = 0, \quad \frac{1}{\Psi_z(z)}\frac{\partial^2\Psi_z(z)}{\partial z^2} + k_z^2 = 0$$

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right)$$

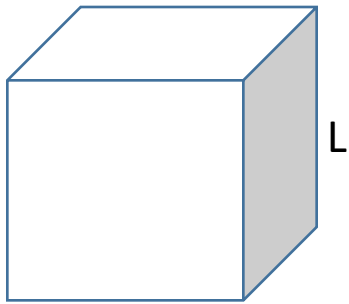
$$n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\Psi(x, y, z) = A \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z)$$

$$k_x = \frac{n_x\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n_y\pi}{a}, \quad k_z = \frac{n_z\pi}{a}$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

Για απλότητα θα θεωρήσουμε $a=b=c=L$



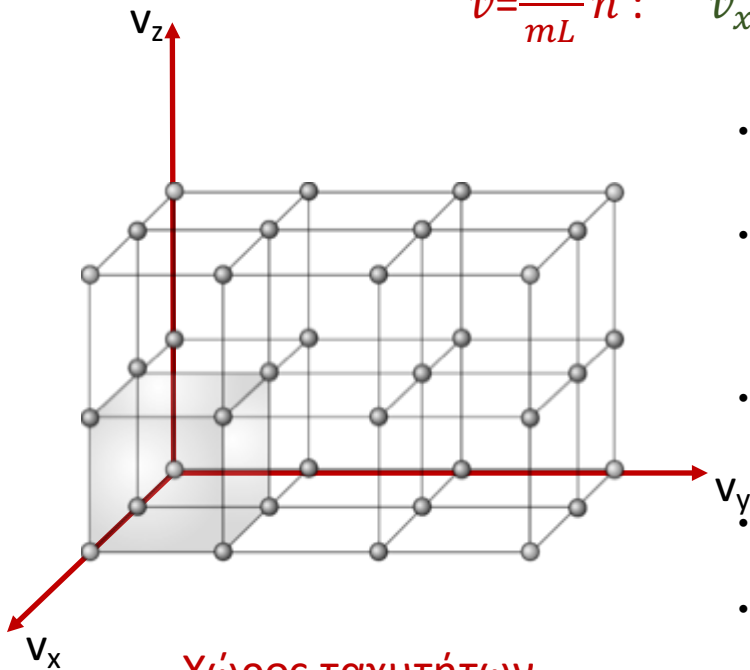
$$E(\mathbf{n}) = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} = \frac{(2\pi\hbar)^2 \mathbf{n}^2}{2mL^2} = \frac{(2\pi\hbar)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)}{2mL^2} \quad k_i = \frac{2\pi n_i}{L}$$

$$\vec{n} = \mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$$

$$E(\mathbf{n}) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\vec{v} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{v} = \frac{2\pi\hbar}{mL} \vec{n} :$$

$$v_x = \frac{2\pi\hbar}{mL} n_x, \quad v_y = \frac{2\pi\hbar}{mL} n_y, \quad v_z = \frac{2\pi\hbar}{mL} n_z$$

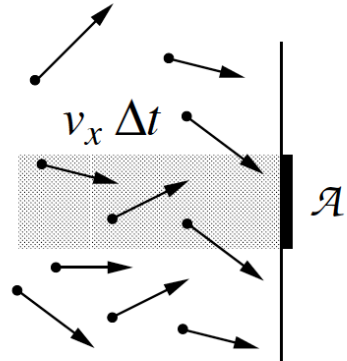


Χώρος ταχυτήτων

- Ο στοιχειώδης χώρος που αντιστοιχεί σε μία κατάσταση ενέργειας (κινητική ενέργεια \rightarrow κατάσταση ταχύτητας) είναι $\left(\frac{2\pi\hbar}{mL}\right)^3$
- Ο αριθμός καταστάσεων με ταχύτητες μεταξύ \vec{v} και $\vec{v}+d\vec{v}$ (δηλαδή ο αριθμός καταστάσεων που εμπεριέχεται σε όγκο $dv_x dv_y dv_z$ του χώρου των ταχυτήτων) θα είναι $\frac{dv_x dv_y dv_z}{\left(\frac{2\pi\hbar}{mL}\right)^3}$
- Ο αριθμός καταστάσεων, ανά μονάδα όγκου (L^3) μεταξύ ταχυτήτων \vec{v} και $\vec{v}+d\vec{v}$ είναι $\left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^3 dv_x dv_y dv_z$
- ο όρος $N = \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^3$ είναι «πυκνότητα καταστάσεων» στον χώρο των ταχυτήτων
- Αλλά τα ηλεκτρόνια είναι Fermions και μπορεί να βρίσκονται δύο ηλεκτρόνια, με αντιπαράλληλο spin, στην ίδια κινηματική κατάσταση, συνεπώς $h(\mathbf{v}) = 2N = 2 \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^3$

Ο χώρος ταχυτήτων είναι διακριτός (κβαντισμένος)

Συνοψίζοντας



σε χρόνο Δt , από την επιφάνεια \mathcal{A} , θα εξέρχονται

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2U}{m}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \overbrace{\rho(v_x, v_y, v_z)}^{\rho(v_x, v_y, v_z)} \underbrace{\frac{1}{1 + \exp\left[\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - E_F\right]/kT}}_{f(E)} (v_x \Delta t) \mathcal{A} dv_x dv_y dv_z$$

$h(v) = 2N$ ηλεκτρόνια

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\sqrt{2U/m}}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z 2N f(E) \mathcal{A} v_x \Delta t \\ &= 2N e^{E_F/kT} \mathcal{A} \Delta t \int_{\sqrt{2U/m}}^{\infty} e^{-mv_x^2/2kT} v_x dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-mv_y^2/2kT} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-mv_z^2/2kT} dv_z \\ &= \frac{4\pi m (kT)^2}{(2\pi\hbar)^3} \mathcal{A} \Delta t \exp\left(-\frac{U - E_F}{kT}\right) \end{aligned}$$

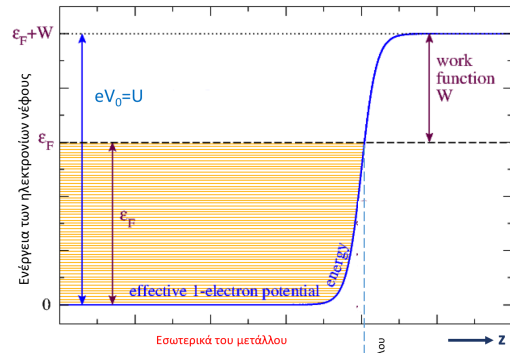
Η παρατηρούμενη **ένταση ρεύματος** λόγω της θερμιοτικής εκπομπής των ηλεκτρονίων θα είναι:

$$I = \frac{(\text{φορτίο } e) \times (\text{αριθμός } e \text{ εκπεμπομένων από επιφάνεια } \mathcal{A} \text{ σε χρόνο } \Delta t)}{(\text{επιφάνεια } \mathcal{A}) \times (\text{χρόνο } \Delta t)}$$

$$= \frac{4\pi q_e m (kT)^2}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left[\frac{-(U - E_F)}{kT}\right] = \frac{4\pi q_e m (kT)^2}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left[\frac{-W}{kT}\right]$$

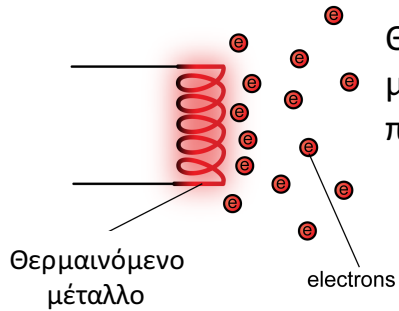
W: έργο εξόδου

Σχέση Richardson $I \sim T^n \exp\left[\frac{-b}{kT}\right]$

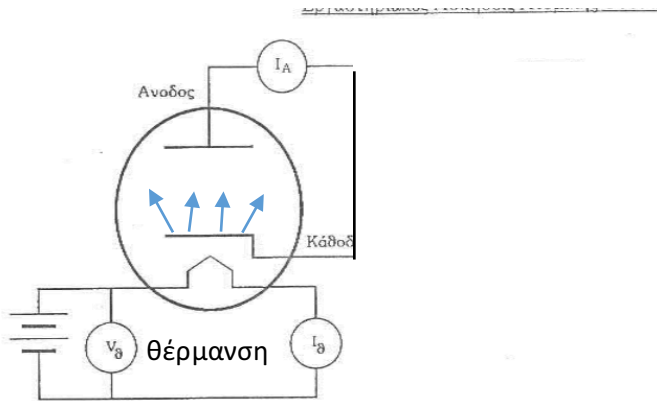


Πειραματικός Σχεδιασμός

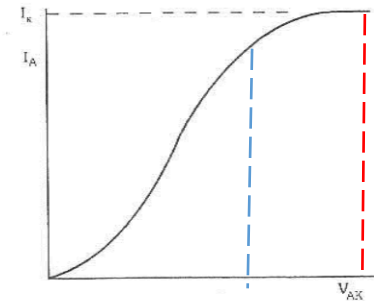
Θα πρέπει να μετρήσουμε το ρεύμα των θερμιοικά εκπεμπόμενων ηλεκτρονίων, ανά μονάδα επιφάνειας, συναρτήσει της απόλυτης θερμοκρασίας T και να συγκρίνουμε με τις προβλέψεις του νόμου του Richardson



$$I_A = \frac{4\pi q_e m (kT)^2}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left[\frac{-W}{kT}\right]$$



Σχήμα 5.3 Το κύκλωμα μιάς διόδου λυχνίας για την μελέτη της θερμιοικής εκπομπής.



Σχήμα 5.4 Η χαρακτηριστική καμπύλη μιάς διόδου λυχνίας. I_K είναι το ρεύμα κόρου.

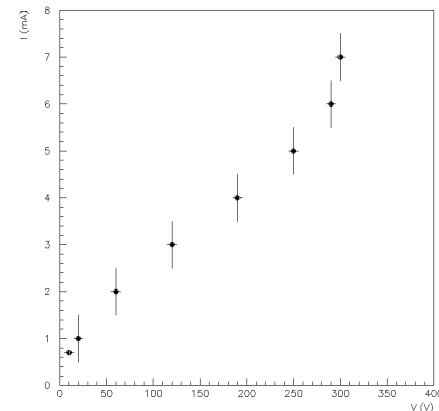
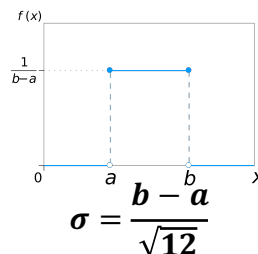
Στις ακόλουθες μετρήσεις θα κρατήσουμε την διαφορά δυναμικού ανόδου-καθόδου στα 300 V

Αρχικά σχηματίζουμε τη χαρακτηριστική καμπύλη της διόδου. Έχοντας μια σταθερή τάση θέρμανσης, μεταβάλλουμε την τάση ανόδου-καθόδου και μετράμε το ανοδικό ρεύμα.

$$V_\theta = 4,5 \text{ V}$$

$$I_\theta = (125 \pm 2,5) \text{ mA}$$

$V (\pm 5 \text{ V})$	$I (\text{mA})$	$\sigma_I (\text{mA})$
10	0,700	0,025
20	1,0	0,5
60	2,0	0,5
120	3,0	0,5
190	4,0	0,5
250	5,0	0,5
290	6,0	0,5
300	7,0	0,5



Θέτουμε την διαφορά δυναμικού ανόδου-καθόδου (V_A) στα 300 V

Για να μελετήσουμε την εξάρτηση του ρεύματος των θερμικά εκπεμπόμενων ηλεκτρονίων $I_{AK} = \mathcal{A} e \frac{4\pi q_e m (kT)^2}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left[\frac{-W}{kT}\right]$ θα μελετήσουμε την μεταβολή του ρεύματος κόρου συναρτήσει της απόλυτης θερμοκρασίας της καθόδου.

Το ρεύμα κόρου το μετράμε κατευθείαν με το αμπερόμετρο του κυκλώματος ενώ την απόλυτη θερμοκρασία την υπολογίζουμε από την τάση θέρμανσης (V_θ) και το ρεύμα (I_θ) που διαρρέει το κύκλωμα θέρμανσης.

Μεταβάλλουμε την τάση θέρμανσης (V_θ) και μετρούμε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα θέρμανσης (I_θ) και το ρεύμα «κόρου» (I_{AK})

$V_\theta (\pm 0,05 V)$	$I_\theta (\pm 2,5 mA)$	$I_{AK} (mA)$	$\sigma_{I_{AK}} (mA)$	$R(\theta) (k\Omega)$	$\sigma_R (k\Omega)$	$T (K)$	$\sigma_T (K)$
2,50	90	0,050	0,025	0,028	0,001	1061	35
3,00	100	0,275	0,025	0,0300	0,0009	1141	33
3,50	110	1,5	0,5	0,0318	0,0009	1208	31
4,00	120	3,0	0,5	0,0333	0,0008	1263	29
4,50	130	6,5	0,5	0,0346	0,0008	1309	28
4,95	135	12,0	0,5	0,0367	0,0008	1384	28

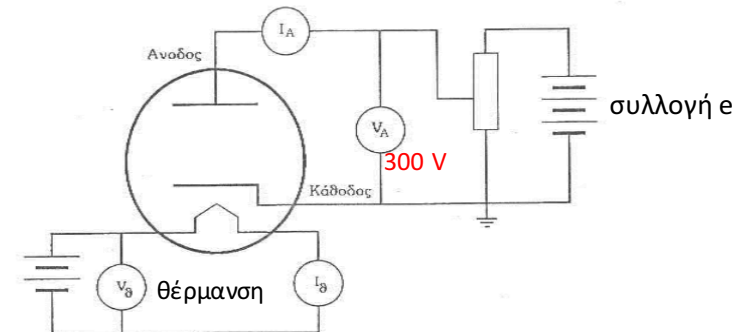
$$R(\theta) = \frac{V_\theta}{I_\theta}$$

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{1}{I_\theta} \sigma_{V_\theta}\right)^2 + \left(\frac{V_\theta}{I_\theta^2} \sigma_{I_\theta}\right)^2}$$

$$R(\theta) = R_0 (1 + \alpha\theta) \quad R_0 = R(0^\circ\text{C}) \quad (\alpha = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ grad}^{-1})$$

Χρησιμοποιώντας ότι $R(25^\circ\text{C}) = 6,8 \Omega$ βρίσκουμε: $R_0 = 6,1125 \Omega$

Συνεπώς: $T(K) = \frac{R(\theta) - R_0}{4,5 \cdot 10^{-3} R_0} + 273 \quad \sigma_T = \frac{1}{4,5 \cdot 10^{-3} R_0} \sigma_R$

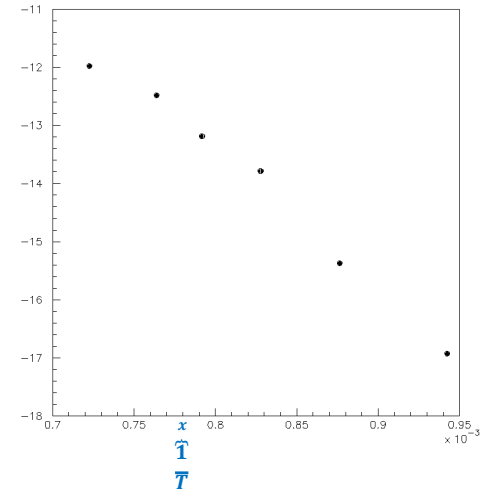


Σχήμα 5.3 Το κύκλωμα μίας διόδου λυχνίας για την μελέτη της θερμοϊονικής εκπομπής.

$$I_{AK} = \mathcal{A} e \frac{4\pi q_e m (kT)^2}{(2\pi\hbar)^3} \exp\left[\frac{-W}{kT}\right]$$

$I_{AK} (mA)$	$\sigma_{I_{AK}} (mA)$	$T(K)$	$\sigma_T (K)$
0,050	0,025	1061	35
0,275	0,025	1141	33
1,5	0,5	1208	31
3,0	0,5	1263	29
6,5	0,5	1309	28
12,0	0,5	1384	28

$$\overbrace{\ln\left(\frac{I_{AK}}{T^2}\right)}^y$$



$$\overbrace{\ln\left(\frac{I_{AK}}{T^2}\right)}^y = \underbrace{\ln\left(\mathcal{A} e \frac{4\pi q_e m (kT)^2}{(2\pi\hbar)^3}\right)}_a + \underbrace{\frac{-W}{k}}_b \overbrace{\frac{1}{T}}^x$$

Παρατήρηση: Οι μεταβλητές $y = \ln\left(\frac{I_{AK}}{T^2}\right)$ και $x = \frac{1}{T}$ συνδέονται με την γραμμική σχέση $y = a + bx$

Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τα πειραματικά δεδομένα και την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων για να υπολογίσουμε την παράμετρο b και στην συνέχεια την τιμή του έργου εξαγωγής (W) ;

Έχουμε μάθει να χρησιμοποιούμε την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων στην περίπτωση που οι μετρήσεις y και x είναι αμοιβαία ανεξάρτητες. Σε αυτή την περίπτωση και το y και το x είναι συναρτήσεις του T και συνεπώς είναι εν γένει εξαρτημένες !!!

Ωστόσο...οι μετρήσεις του ρεύματος «κόρου» (I_{AK}) και η εκτίμηση της θερμοκρασίας είναι ανεξάρτητες (μετρήσεις σε δύο διαφορετικά κυκλώματα $cov[I_{AK}, T]=0$)

$$\sigma_y^2 = \left[\frac{\partial}{\partial I_{AK}} \ln\left(\frac{I_{AK}}{T^2}\right)\right]^2 \sigma_{I_{AK}}^2 + \left[\frac{\partial}{\partial T} \ln\left(\frac{I_{AK}}{T^2}\right)\right]^2 \sigma_T^2 = \underbrace{\frac{\sigma_{I_{AK}}^2}{I_{AK}^2}}_{\text{συμβολή από το } I_{AK}} + \underbrace{\frac{4\sigma_T^2}{T^2}}_{\text{συμβολή από το } T}$$

$$\sigma_x^2 = \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{T}\right)\right]^2 \sigma_T^2 = \frac{1}{T^4} \sigma_T^2$$

$$cov[y, x] = \frac{\partial}{\partial I_{AK}} \ln\left(\frac{I_{AK}}{T^2}\right) \underbrace{\frac{\partial}{\partial I_{AK}} \ln\left(\frac{1}{T}\right)}_0 \sigma_{I_{AK}}^2 + \frac{\partial}{\partial T} \ln\left(\frac{I_{AK}}{T^2}\right) \frac{\partial}{\partial T} \ln\left(\frac{1}{T}\right) \sigma_T^2 = \frac{2}{T^3} \sigma_T^2$$

$I_{AK} (mA)$	$\sigma_{I_{AK}} (mA)$	$T (K)$	$\sigma_T (K)$
0,050	0,025	1061	35
0,275	0,025	1141	33
1,5	0,5	1208	31
3,0	0,5	1263	29
6,5	0,5	1309	28
12,0	0,5	1384	28

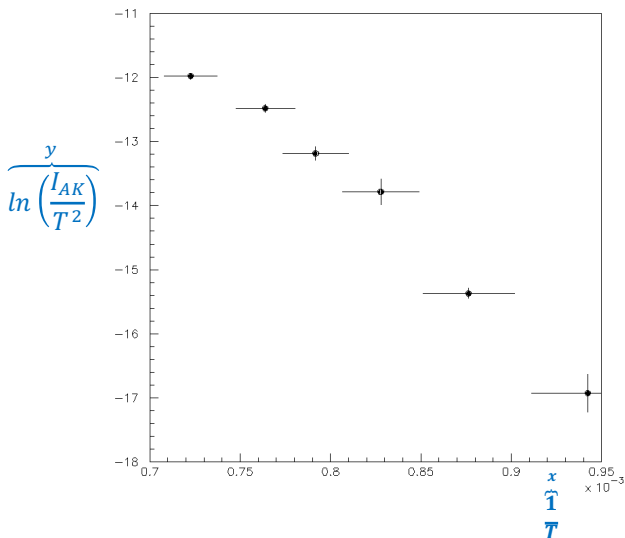
$$\ln\left(\frac{I_{AK}}{T^2}\right) = \underbrace{\ln\left(\mathcal{A} e \frac{4\pi q_e m (kT)^2}{(2\pi\hbar)^3}\right)}_a + \underbrace{\frac{-W}{k} \frac{1}{T}}_b$$

$$\sigma_y^2 = \underbrace{\frac{\sigma_{I_{AK}}^2}{I_{AK}^2}}_{\text{συμβολή από το } I_{AK}} + \underbrace{\frac{4\sigma_T^2}{T^2}}_{\text{συμβολή από το } T}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{T^4} \sigma_T^2$$

$$\text{cov}[y, x] = \frac{2}{T^3} \sigma_T^2$$

$x (1/T)$	σ_x	$y (\ln(I_{AK}/T^2))$	σ_y	$\text{cov}[x, y]$	$\text{cov}[x, y] / \sigma_y \sigma_x$
0.9425071E-03	0.3109119E-04	-16.92967	0.5043340	0.2051256E-05	0.1308171
0.8764242E-03	0.2534794E-04	-15.37031	0.1077515	0.1466226E-05	0.5368276
0.8278146E-03	0.2124359E-04	-13.78798	0.3372615	0.1090317E-05	0.1521802
0.7917656E-03	0.1817989E-04	-13.18388	0.1728776	0.8348644E-06	0.2656355
0.7639420E-03	0.1634100E-04	-12.48223	0.8801904E-01	0.6990804E-06	0.4860397
0.7225433E-03	0.1461793E-04	-11.98056	0.5808028E-01	0.5914769E-06	0.6966638



Οι μεταβλητές $y = \ln\left(\frac{I_{AK}}{T^2}\right)$ και $x = \frac{1}{T}$ είναι στατιστικά στατιστικά εξαρτημένες ($\text{cov}[x, y] \neq 0$)

Τα στατιστικά σφάλματα στο x είναι, σχετικά, μεγαλύτερα από ότι τα σφάλματα στο y .

Προσεγγίσεις

Θα θεωρήσουμε ότι η μέτρηση (εκτίμηση) στο y δεν «πάσχει» από σφάλμα (δηλαδή το y δεν είναι τυχαία μεταβλητή και άρα x και y είναι ανεξάρτητα)

Θα ορίσουμε την σχέση:

$$\underbrace{\frac{-k}{W}}_B \ln\left(\frac{I_{AK}}{T^2}\right) + \underbrace{\frac{-k}{W} \ln\left(\mathcal{A} e \frac{4\pi q_e m (kT)^2}{(2\pi\hbar)^3}\right)}_A = \frac{x}{T} \rightarrow x = By + A$$

και θα εκτιμήσουμε τις παραμέτρους A και B , με την μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων, από τα πειραματικά δεδομένα !!!

Προσεγγίσεις

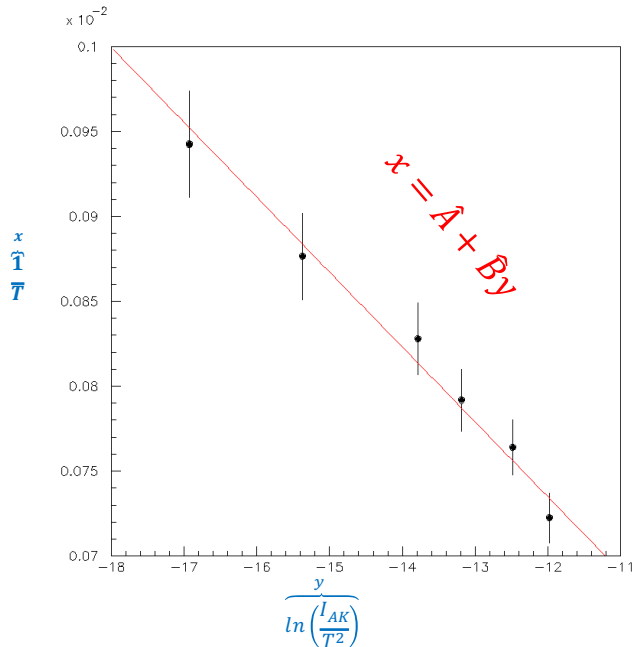
Θα θεωρήσουμε ότι η μέτρηση (εκτίμηση) στο y δεν «πάσχει» από σφάλμα (δηλαδή το y δεν είναι τυχαία μεταβλητή και άρα x και y είναι ανεξάρτητα)

Θα ορίσουμε την σχέση:

$$\underbrace{\frac{-k}{\hat{W}} \ln\left(\frac{I_{AK}}{T^2}\right)}_B + \underbrace{\frac{-k}{W} \ln\left(\mathcal{A} e \frac{4\pi q_e m (kT)^2}{(2\pi\hbar)^3}\right)}_A = \frac{x}{T} \rightarrow x = By + A$$

και θα εκτιμήσουμε τις παραμέτρους A και B , με την μέθοδο ελάχιστων τετραγώνων, από τα πειραματικά δεδομένα !!!

x (1/T)	σ_x	y ($\ln(I_{AK}/T^2)$)	σ_y	$\text{cov}[x,y]$	$\text{cov}[x,y]/\sigma_y\sigma_x$
0.9425071E-03	0.3109119E-04	-16.92967			
0.8764242E-03	0.2534794E-04	-15.37031			
0.8278146E-03	0.2124359E-04	-13.78798			
0.7917656E-03	0.1817989E-04	-13.18388			
0.7639420E-03	0.1634100E-04	-12.48223			
0.7225433E-03	0.1461793E-04	-11.98056			



$$\hat{A} = 0.21 \cdot 10^{-3} \pm 0.07 \cdot 10^{-3}$$

$$\hat{B} = \frac{-k}{W} = -0.44 \cdot 10^{-4} \pm 0.05 \cdot 10^{-4}$$

$$\hat{W} = 1.96 \pm 0.22 \text{ eV}$$