

**Σ. Δεδούσης, Χ. Ελευθεριάδης, Μ. Ζαμάνη, Α. Ιωαννίδου, Γ. Κίτης,
Α. Λιόλιος, Μ. Μανωλοπούλου, Κ. Παπαστεφάνου, Χ. Πετρίδου,
Η. Σαββίδης, Δ. Σαμψωνίδης, Στ. Στούλος, Μ. Χαρδάλας**

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΤΟΜΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

**ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ
2009 – 10**

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σκοπός των εργαστηριακών μαθημάτων είναι η εκπαίδευση των φοιτητών σε θέματα όπου η από έδρας διδασκαλία προσφέρει ελάχιστα. Ειδικά, στα περισσότερα προβλήματα της Φυσικής το ζητούμενο είναι η ‘μέτρηση’ κάποιου φυσικού μεγέθους. Οι παράμετροι που επηρεάζουν αυτή την μέτρηση είναι πολλές και απαιτείται ειδική εκπαίδευση ‘μύηση’ για τον σχεδιασμό των πειραμάτων κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται και ο αριθμός αλλά και η επίδραση αυτών στην μετρούμενη ποσότητα.

Σκοπός αυτού του βιβλίου είναι να συμβάλλει στην εκπαίδευση των φοιτητών σε θέματα Ατομικής και Μοριακής Φυσικής.

Οι εργαστηριακές ασκήσεις που περιέχονται στο παρόν βιβλίο είναι εκείνες στις οποίες εκπαιδεύονται οι φοιτητές του Τμήματος Φυσικής του ΑΠΘ στο εργαστηριακό μάθημα ‘Εργαστήριο Ατομικής και Μοριακής Φυσικής’. Έγινε προσπάθεια να περιληφθεί η βασική και απαραίτητη ύλη για την κατανόηση της φυσικής των πειραμάτων καθώς και οι απαραίτητες οδηγίες για την εκτέλεσή τους. Αυτό δεν σημαίνει ότι οι φοιτητές πρέπει να αρκούνται μόνο σ’ αυτήν την ύλη. Για την πλήρη κατανόηση των ασκήσεων θα πρέπει να ανατρέχουν επιπλέον και σε άλλα συγγράμματα Ατομικής και Μοριακής Φυσικής στα οποία αναλύεται εκτενέστερα η φυσική του κάθε πειράματος.

Το βιβλίο διαιρείται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος έγινε προσπάθεια να συμπεριληφθούν, με τον σαφέστερο δυνατό τρόπο, τα βασικά τμήματα της θεωρίας των σφαλμάτων που απαιτούνται για την σωστή εκτίμηση των πειραματικών σφαλμάτων και των χειρισμών τους κατά την πορεία των υπολογισμών που απαιτούνται σε μια άσκηση. Στο δεύτερο μέρος περιλαμβάνονται οι εργαστηριακές ασκήσεις.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2009

Οι συγγραφείς

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

| | |
|--|----|
| ΠΡΟΛΟΓΟΣ..... | 3 |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 | 11 |
| ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ | 11 |
| I. Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ..... | 11 |
| II. ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΥΧΑΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ | 13 |
| III. ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ | 14 |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4..... | 17 |
| ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ..... | 17 |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 | 21 |
| ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΤΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ..... | 21 |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6..... | 25 |
| ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ (FITTING) ΚΑΜΠΥΛΩΝ..... | 25 |
| I. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ | 25 |
| II. ΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ FITS. Η ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ..... | 26 |
| A. Το γραμμικό fit όταν και οι δύο μεταβλητές έχουν σφάλμα..... | 28 |
| ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 | 29 |
| ΓΕΝΙΚΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΑΡΙΘΜΩΝ | 29 |
| ΑΣΚΗΣΗ 1 | 33 |
| ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΤΑΘΕΡΑΣ ΤΟΥ PLANCK..... | 33 |
| I. ΘΕΩΡΙΑ | 33 |
| A. Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και η κβαντική φύση του φωτός | 33 |
| B. Το φωτοκύτταρο και η μέτρηση της σταθεράς του Planck | 36 |
| II. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ | 38 |
| III. ΟΡΓΑΝΑ | 39 |
| IV. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ..... | 40 |
| ΑΣΚΗΣΗ 3 | 43 |
| ΠΕΙΡΑΜΑ FRANCK – HERTZ: ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ ΕΝΟΣ ΑΤΟΜΟΥ..... | 43 |
| I. ΘΕΩΡΙΑ | 43 |
| A. Διέγερση των ατόμων..... | 43 |
| B. Διέγερση με σκεδάσεις ηλεκτρονίων καθορισμένης ενέργειας | 44 |
| II. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ | 46 |
| III. ΟΡΓΑΝΑ | 49 |
| IV. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ..... | 49 |
| A. Μετρήσεις με την λυχνία Hg..... | 49 |

| | |
|---|----|
| B. Μετρήσεις με την λυχνία Ne | 49 |
| ΑΣΚΗΣΗ 4 | 51 |
| ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ <i>em</i> ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΟΥ | 51 |
| I. ΘΕΩΡΙΑ | 51 |
| II. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ | 53 |
| A. Ο ρόλος του αερίου της λυχνίας..... | 55 |
| B. Επίδραση εξωτερικών παραγόντων | 55 |
| III. ΟΡΓΑΝΑ | 57 |
| IV. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ..... | 57 |
| ΑΣΚΗΣΗ 5 | 59 |
| ΘΕΡΜΙΟΝΙΚΗ ΕΚΠΟΜΠΗ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ..... | 59 |
| I. ΘΕΩΡΙΑ | 59 |
| A. Ελεύθερα ηλεκτρόνια των μετάλλων | 59 |
| B. Έργο εξόδου και σχέση του Richardson..... | 62 |
| II. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ | 65 |
| III. ΟΡΓΑΝΑ | 67 |
| IV. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ..... | 67 |
| ΑΣΚΗΣΗ 6 | 69 |
| ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ | 69 |
| I. ΘΕΩΡΙΑ | 69 |
| II. ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΤΩΝ ΑΚΤΙΝΩΝ Χ | 70 |
| III. ΣΚΕΔΑΣΗ ΤΩΝ ΑΚΤΙΝΩΝ Χ ΑΠΟ ΛΕΠΤΗ ΣΚΟΝΗ | 71 |
| IV. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ..... | 72 |
| A. Απόδειξη της κυματικής φύσης των ηλεκτρονίων | 73 |
| B. Η κρυσταλλική κυψελίδα του γραφίτη | 74 |
| V. ΟΡΓΑΝΑ | 74 |
| VI. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ..... | 74 |
| ΑΣΚΗΣΗ 8 | 77 |
| ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΚΒΑΝΤΙΚΩΝ ΜΕΤΑΠΤΩΣΕΩΝ ΣΤΟ ΑΤΟΜΟ ΤΟΥ Na..... | 77 |
| I. ΘΕΩΡΙΑ | 77 |
| A. Ενεργειακές στάθμες του ατόμου του υδρογόνου..... | 77 |
| B. Ενεργειακές στάθμες του ατόμου του νατρίου..... | 79 |
| Γ. Μεταπτώσεις μεταξύ των ενεργειακών σταθμών και κανόνες επιλογής..... | 82 |
| Δ. Λεπτή υφή | 83 |
| II. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ | 85 |
| A. Βαθμολόγηση του φασματόμετρου..... | 87 |
| B. Μελέτη των φασματικών γραμμών του νατρίου | 87 |
| Γ. Λεπτή υφή της γραμμής D του νατρίου | 87 |
| III. ΟΡΓΑΝΑ | 88 |
| IV. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ..... | 88 |
| A. Αναγνώριση των οργάνων, ρυθμίσεις | 88 |
| B. Παρατήρηση ενός συνεχούς και ενός γραμμικού φάσματος..... | 88 |

| | |
|--|----|
| Γ. Μελέτη του φάσματος του νατρίου με φράγμα περίθλασης..... | 89 |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1 | 91 |
| ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΟΜΕΤΡΟ 610 C ΤΗΣ KEITHLEY | 91 |
| ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2 | 95 |
| ΦΥΣΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ..... | 95 |

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

I. Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Όταν μετράμε μια φυσική ποσότητα, η τιμή που λαμβάνουμε ποτέ δεν είναι ακριβώς ίση με την πραγματική τιμή. Είναι σημαντικό να δώσουμε κάποια ένδειξη του πόσο κοντά στην πραγματική τιμή βρίσκεται το αποτέλεσμα, δηλαδή να δώσουμε κάποια ένδειξη της ακρίβειας ή της αξιοπιστίας των μετρήσεων. Αυτό γίνεται συμπεριλαμβάνοντας στο αποτέλεσμα και μια εκτίμηση του σφάλματος της μέτρησης. Για παράδειγμα, όταν μετράμε την ένταση του ρεύματος I που διαρρέει ένα κύκλωμα, δίνουμε το αποτέλεσμα της μέτρησης σαν:

$$I = 1,3 \pm 0,1 \text{ A} \quad (1.1)$$

Αυτό σημαίνει ότι η ένταση του ρεύματος είναι στην περιοχή 1,2 – 1,4 A. Η σχέση (1.1) είναι μια έκφραση πιθανότητας. Αυτό δεν σημαίνει ότι είμαστε σίγουροι ότι η τιμή είναι μέσα στα παραπάνω όρια, αλλά ότι οι μετρήσεις μας δείχνουν ότι υπάρχει κάποια πιθανότητα να γίνεται αυτό.

Η εκτίμηση των σφαλμάτων είναι σημαντική γιατί χωρίς αυτά δεν μπορούμε να βγάλουμε κάποια σημαντικά συμπεράσματα από τα πειραματικά μας αποτελέσματα. Υποθέτουμε, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να δούμε αν υπάρχει κάποια επίδραση της θερμοκρασίας στην αντίσταση ενός πηνίου. Οι τιμές της αντίστασης που μετρήθηκαν είναι:

$$200,025 \ \Omega \text{ στους } 10^{\circ} \text{ C}$$

$$200,034 \ \Omega \text{ στους } 20^{\circ} \text{ C}$$

Η διαφορά μεταξύ των δύο μετρήσεων είναι σημαντική; Χωρίς να γνωρίζουμε τα σφάλματα των μετρήσεων δεν μπορούμε να πούμε τίποτε. Αν, για παράδειγμα, το σφάλμα κάθε τιμής της αντίστασης είναι 0,001 Ω , η διαφορά είναι σημαντική, ενώ αν το σφάλμα είναι 0,010 Ω δεν είναι.

Άπαξ και έχουν ληφθεί τα αποτελέσματα ενός πειράματος ανακοινώνονται και γίνονται κτήμα όλων. Διαφορετικοί άνθρωποι μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν με

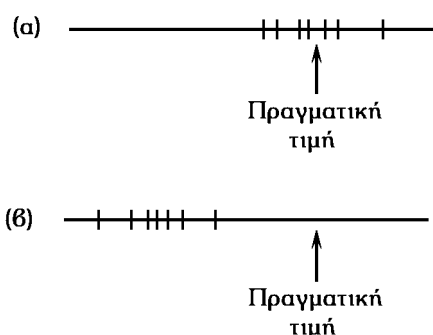
12 Εισαγωγή στην θεωρία των σφαλμάτων

διαφορετικούς τρόπους. Κάποιοι μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν σε υπολογισμούς, άλλοι μπορούν να τα συγκρίνουν με κάποια θεωρητική πρόβλεψη. Για παράδειγμα, ένας ηλεκτρολόγος μηχανικός μπορεί να θέλει να γνωρίζει την αντίσταση του χαλκού για να σχεδιάσει έναν μετασχηματιστή, ενώ ένας Φυσικός που ασχολείται με την στερεά κατάσταση μπορεί να θέλει να γνωρίζει την ίδια ποσότητα για να ελέγξει την θεωρία των ηλεκτρονίων στα μέταλλα. Όμως, ανεξάρτητα από την χρήση του πειραματικού αποτελέσματος που θα κάνει κάποιος, θα θέλει να γνωρίζει αν τα αποτελέσματα έχουν την απαιτούμενη ακρίβεια για την εργασία του. Αν πρόκειται να καταλήξει σε κάποια συμπεράσματα από το αποτέλεσμα, θα θέλει να γνωρίζει τον βαθμό της αξιοπιστίας του. Για να απαντηθούν τέτοιες ερωτήσεις, είναι απαραίτητη η εκτίμηση του σφάλματος του αποτελέσματος.

Αν και αυτός που κάνει ένα πείραμα μπορεί να μην είναι ικανός να προβλέψει όλες τις πιθανές χρήσεις των αποτελεσμάτων του, μπορεί να γνωρίζει κάποιες από αυτές. Κανένα πείραμα δεν γίνεται έτσι απλά για να γίνει, τουλάχιστον από νοήμονες ανθρώπους. Αν το πείραμα πρόκειται να γίνει για τον έλεγχο μιας θεωρίας, ο πειραματιστής πρέπει να έχει μια ιδέα για την απαιτούμενη ακρίβεια των αποτελεσμάτων ώστε να παρέχει μια χρήσιμη σύγκριση με τις θεωρητικές προβλέψεις. Έτσι, η ιδέα της χρήσης των σφαλμάτων για να εξαχθούν συμπεράσματα από τα αποτελέσματα ενός πειράματος εφαρμόζεται και αντίστροφα. Ο σκοπός του πειράματος συχνά καθορίζει το ανεκτό σφάλμα και αυτό μπορεί να έχει σημαντική επίδραση στην διαδικασία του πειράματος.

Θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι κάθε πείραμα θα μπορούσε να γίνει κατά το δυνατόν ακριβέστερο, αλλά αυτό δεν είναι ρεαλιστικό. Η ζωή είναι περιορισμένη, οι πόροι του πειράματος περιορισμένοι καθώς και, εκτός και αν πρόκειται για ιδιοφυΐα, η υπομονή αυτού που κάνει το πείραμα. Συνεπώς, είναι σημαντικό να σχεδιάσουμε και να εκτελέσουμε το πείραμα έτσι ώστε η ακρίβεια στην τελική απάντηση να ικανοποιεί το αντικείμενο του πειράματος. Ας υποθέσουμε, στο πείραμα που δόθηκε στην αρχή του κεφαλαίου, ότι ενδιαφερόμαστε για την αντίσταση του πηνίου με σκοπό να την χρησιμοποιήσουμε σαν στάνταρ αντίσταση στην περιοχή $10 - 20^{\circ}\text{C}$ και ότι η ακρίβεια που απαιτείται είναι 1 προς 10.000. Μια μέτρηση της αντίστασης με ακρίβεια $0,010 \Omega$ θα ήταν αρκούντως κατάλληλη και η προσπάθεια της μείωσης του σφάλματος στα $0,001 \Omega$ θα ήταν χάσιμο χρόνου. Όμως, η μέτρηση της αντίστασης με σφάλμα $0,05 \Omega$ θα ήταν ακόμη χειρότερη, επειδή οι μετρήσεις θα ήταν έξω από τον σκοπό του πειράματος.

Λίγα πειράματα είναι τόσο απλά ώστε η τελική ποσότητα να μετριέται άμεσα. Συνήθως πρέπει να μετρήσουμε κάποιες πρωτογενείς ποσότητες και, στην συνέχεια, να τις συνδυάσουμε ώστε να προκύψει η ποσότητα που θέλουμε. Τα σφάλματα στις πρωτογενείς ποσότητες καθορίζουν το σφάλμα του τελικού αποτελέσματος. Γενικά, τα πρωτογενή σφάλματα συνεισφέρουν διαφορετικά ποσά στο τελικό σφάλμα. Το τελικό σφάλμα ελαχιστοποιείται αν ο περιορισμένος χρόνος, η διάταξη και η υπομονή που είναι διαθέσιμα επικεντρώνονται στην μείωση των σφαλμάτων εκείνων που συνεισφέρουν περισσότερο στο τελικό σφάλμα.



Σχήμα 1.1 Ένα σύνολο μετρήσεων (α) μόνο με τυχαία σφάλματα και (β) με συστηματικά και τυχαία σφάλματα. Κάθε σημείο παριστάνει το αποτέλεσμα μιας μέτρησης.

Έτσι, βλέπουμε ότι η ιδέα του σφάλματος δεν είναι κάτι δευτερεύον ή περιφερειακό σε ένα πείραμα. Αντίθετα, σχετίζεται με τον σκοπό του πειράματος, την μέθοδο και την σημαντικότητα των αποτελεσμάτων.

II. ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΥΧΑΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Τα σφάλματα μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες: τα *συστηματικά* και τα *τυχαία*. Συστηματικά σφάλματα είναι τα σφάλματα που εισάγονται από την χρήση κάποιου συστήματος μέτρησης και γενικά παραμένουν σταθερά σε ένα σύνολο μετρήσεων*. Η παρουσία σταθερών συστηματικών σφαλμάτων έχει σαν συνέπεια την μετατόπιση της τιμής του μετρούμενου μεγέθους προς την μια κατεύθυνση. Τυχαία σφάλματα είναι τα σφάλματα που μεταβάλλονται και είναι εξ ίσου πιθανό να είναι θετικά ή αρνητικά.

Τα τυχαία σφάλματα είναι πάντοτε παρόντα σε ένα πείραμα και, απουσία συστηματικών σφαλμάτων, έχουν σαν συνέπεια οι διαδοχικές μετρήσεις να διασπείρονται γύρω από την τιμή της μετρούμενης ποσότητας, σχήμα 1.1α. Αν, επιπλέον, υπάρχουν και συστηματικά σφάλματα, οι μετρήσεις διασπείρονται, όχι γύρω από την πραγματική τιμή, αλλά γύρω από κάποια μετατοπισμένη τιμή, σχήμα 1.1β.

Υποθέτουμε ότι μετριέται η περίοδος ενός εκκρεμούς με την βοήθεια ενός χρονομέτρου και η μέτρηση επαναλαμβάνεται πολλές φορές. Σφάλματα στην έναρξη και στο σταμάτημα του χρονομέτρου, στην εκτίμηση των υποδιαίρέσεων της κλίμακας, μικρές ανωμαλίες στην κίνηση του εκκρεμούς, όλα αυτά προκαλούν μεταβολές στο αποτέλεσμα των μετρήσεων και μπορούν να θεωρηθούν σαν τυχαία σφάλματα. Αν δεν υπάρχουν άλλα σφάλματα, κάποιες τιμές θα είναι υψηλές και κάποιες πολύ χαμηλές. Αλλά αν, επιπλέον, το χρονόμετρο βραδυπορεί, όλες οι τιμές θα είναι χαμηλές. Αυτό είναι συστηματικό σφάλμα.

Πρέπει να σημειωθεί ότι τα συστηματικά και τα τυχαία σφάλματα ορίζονται σύμφωνα με το αν προκαλούν τυχαίες ή συστηματικές επιδράσεις στην μέτρηση. Έτσι, δεν μπορούμε να πούμε ότι μια πηγή σφάλματος είναι έμφυτα συστηματική ή τυχαία. Στο προηγούμενο παράδειγμα, υποθέτουμε ότι κάθε φορά που μετράμε την περίοδο του εκκρεμούς χρησιμοποιούμε και άλλο χρονόμετρο. Κάποια χρονόμετρα

* Αυτός ο ορισμός είναι πολύ περιορισμένος. Κάποια συστηματικά σφάλματα δεν είναι σταθερά. Απλά, για να δώσουμε την βασική ιδέα, περιοριζόμαστε στην απλή αυτή περίπτωση. Πιο γενικές περιπτώσεις θα δοθούν αλλού.

14 Εισαγωγή στην θεωρία των σφαλμάτων

μπορούν να τρέχουν και κάποια να βραδυπορούν. Τέτοιες ανακρίβειες παράγουν τώρα τυχαία σφάλματα.

Πάλι, κάποιες πηγές σφάλματος μπορούν να προκαλούν και τυχαίες και συστηματικές επιδράσεις. Για παράδειγμα, στον χειρισμό του χρονομέτρου μπορεί όχι μόνο να ξεκινάμε και να σταματάμε το χρονόμετρο με ελαφρά διαφορετικό τρόπο σε σχέση με την κίνηση του εκκρεμούς, προκαλώντας έτσι ένα τυχαίο σφάλμα, αλλά μπορεί να έχουμε την τάση να ξεκινάμε λίγο αργά και να σταματάμε λίγο νωρίς το χρονόμετρο, προκαλώντας έτσι ένα συστηματικό σφάλμα.

Είναι πολύ χρήσιμο να κάνουμε διάκριση μεταξύ των εννοιών *ορθός* και *ακριβής* στο πλαίσιο των σφαλμάτων. Έτσι, ένα αποτέλεσμα είναι *ορθό* αν είναι κατά το δυνατόν ελεύθερο από συστηματικά σφάλματα και *ακριβές* όταν τα τυχαία σφάλματα είναι μικρά.

III. ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Συστηματικά σφάλματα συχνά προκύπτουν επειδή η πειραματική διάταξη διαφέρει από αυτήν που υποτέθηκε στην θεωρία και οι διορθωτικοί παράγοντες που λαμβάνουν υπ' όψη τις διαφορές αυτές αγνοούνται. Είναι εύκολο να δώσουμε παραδείγματα επιδράσεων που οδηγούν σε συστηματικά σφάλματα. Ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται από τις διαφορές θερμοκρασίας σε μια γέφυρα με αντιστάσεις, η αντίσταση των άκρων σε ένα θερμομέτρο πλατίνας, η διαστολή του σωλήνα ενός υδραργυρικού θερμομέτρου, οι απώλειες θερμότητας σε ένα πείραμα θερμιδομετρίας, η απώλεια γεγονότων λόγω του νεκρού χρόνου του συστήματος ανίχνευσης σε ένα πείραμα μέτρησης σωματιδίων είναι μερικά τέτοια παραδείγματα. Άλλη πηγή συστηματικών σφαλμάτων είναι αυτή που αναφέρθηκε προηγουμένως, τα μη ακριβή όργανα.

Τα τυχαία σφάλματα μπορούν να ανιχνευθούν επαναλαμβάνοντας τις μετρήσεις. Επιπλέον, λαμβάνοντας περισσότερες μετρήσεις παίρνουμε, από την αριθμητική μέση τιμή, μια τιμή που προσεγγίζει ολοένα και περισσότερο την πραγματική τιμή. Τίποτε από τα παραπάνω δεν είναι αληθές για τα συστηματικά σφάλματα. Επαναλαμβανόμενες μετρήσεις με την ίδια διάταξη ούτε φανερώνουν ούτε εξαλείφουν τα συστηματικά σφάλματα. Αν σε ένα πείραμα υπάρχουν μεγάλα τυχαία σφάλματα θα οδηγήσουν σε μεγάλη τιμή του τελικού σφάλματος. Έτσι, καθένας έχει επίγνωση της ανακρίβειας του αποτελέσματος και δεν συμβαίνει κανένα κακό, εκτός πιθανώς από τον θιγμένο εγωισμό του πειραματιστή επειδή κανένας δεν λαμβάνει υπ' όψη του το αποτέλεσμα. Όμως, η συγκαλυμμένη παρουσία συστηματικών σφαλμάτων μπορεί να οδηγήσει σε ένα αληθοφανές αποτέλεσμα, δοσμένο με μικρό σφάλμα, πράγμα το οποίο είναι πάρα πολύ κακό.

Ένα κλασικό παράδειγμα είναι το πείραμα Millikan για την μέτρηση του φορτίου του ηλεκτρονίου. Στο πείραμα αυτό είναι απαραίτητη η γνώση του ιξώδους του αέρα. Η τιμή που χρησιμοποίησε ο Millikan ήταν πολύ χαμηλή, με αποτέλεσμα η τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου να είναι:

$$e = (1,591 \pm 0,0012) \times 10^{-19} \text{ C}$$

Η τιμή αυτή μπορεί να συγκριθεί με την σημερινή τιμή (*Physics Letter B (Review of Particle Physics)* vol. **592**, 1 – 4, July 2004).

$$e = (1,60217653 \pm 0,00000014) \times 10^{-19} \text{ C}$$

Μέχρι περίπου το 1930, οι τιμές μερικών άλλων ατομικών σταθερών, όπως η σταθερά του Planck και ο αριθμός του Avogadro, βασίζονταν στην τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου που δόθηκε από τον Millikan και συνεπώς είχαν σφάλμα μεγαλύτερο από 0,5%.

Τα τυχαία σφάλματα μπορούν να εκτιμηθούν με στατιστικές μεθόδους, που θα δοθούν στην συνέχεια. Τα συστηματικά σφάλματα δεν οδηγούν σε καμιά τέτοια σαφή αντιμετώπιση. Ο ασφαλέστερος τρόπος είναι να θεωρηθούν σαν επιδράσεις που πρέπει να ανακαλυφθούν και στην συνέχεια να εξαλειφθούν. Δεν υπάρχει κανένας γενικός κανόνας για να γίνει αυτό. Είναι μια περίπτωση σκέψης για την μέθοδο με την οποία γίνεται ένα πείραμα και πάντα πρέπει κανείς να είναι καχύποπτος με την διάταξη. Θα προσπαθήσουμε να δώσουμε κάποιες πηγές συστηματικών σφαλμάτων, αλλά στο ζήτημα αυτό δεν υπάρχει υποκατάστατο της εμπειρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Ας θεωρήσουμε ένα πείραμα στο οποίο μετράμε το μήκος ενός τραπεζιού με την βοήθεια ενός μέτρου. Ας κάνουμε, επιπλέον, ένα σύνολο επαναλαμβανόμενων μετρήσεων προσπαθώντας να διαβάσουμε κάθε φορά την ένδειξη του μέτρου με την μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια. Θα διαπιστώσουμε ότι οι τιμές κυμαίνονται γύρω από κάποια τιμή και, αν σχεδιάσουμε την συνάρτηση κατανομής της συχνότητας, θα δούμε ότι σχηματίζεται μια κατανομή. Οι διαφορετικές τιμές είναι το αποτέλεσμα της επίδρασης μερικών μικρών παραγόντων οι οποίοι δεν ελέγχονται από αυτόν που κάνει το πείραμα και μπορούν να μεταβάλλονται από την μια μέτρηση στην άλλη. Για παράδειγμα, τέτοιοι παράγοντες μπορούν να είναι η μη ευθυγράμμιση του μέτρου, οι διαστολές ή συστολές λόγω της μεταβολής της θερμοκρασίας, η αποτυχία του πειραματιστή να βάλει κάθε φορά το μηδέν του μέτρου στο ίδιο σημείο κ.λπ. Όλοι αυτοί οι παράγοντες είναι πηγές σφαλμάτων λόγω της χρήσης του οργάνου με το οποίο γίνεται η μέτρηση, όπου στο όργανο συμπεριλαμβάνεται και ο παρατηρητής. Φυσικά, όσο περισσότεροι από τους παράγοντες αυτούς ελέγχονται, τόσο μικρότερη θα είναι η διακύμανση των τιμών. Τότε λέμε ότι το όργανο είναι πιο ακριβές. Στο όριο ενός ιδανικού, τέλειου οργάνου, η κατανομή γίνεται συνάρτηση δ με κέντρο την πραγματική τιμή της μετρούμενης ποσότητας. Φυσικά, δεν υπάρχει τέτοιο όργανο.

Έτσι, η κατανομή της μέτρησης ενός μεγέθους, που περιλαμβάνει την λήψη ενός δείγματος από ένα μεγάλο σύνολο, καθορίζεται από την ανακρίβεια του οργάνου που χρησιμοποιείται στην μέτρηση. Σε όλες τις περιπτώσεις η κατανομή είναι γκαουσιανή. Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν συστηματικά σφάλματα, η μέση τιμή της γκαουσιανής είναι η πραγματική τιμή της μετρούμενης ποσότητας και η στάνταρ απόκλιση της κατανομής σχετίζεται με την ακρίβεια του οργάνου με το οποίο γίνεται η μέτρηση.

Η ακρίβεια ενός οργάνου μέτρησης έχει δύο συνιστώσες:

1. την ακρίβεια της ανάγνωσης και
2. την ακρίβεια της βαθμολογίας.

18 Εισαγωγή στην θεωρία των σφαλμάτων

Η συνολική ακρίβεια του οργάνου είναι το άθροισμα των δύο συνιστωσών.

Η ακρίβεια της βαθμολογίας καθορίζεται από τον κατασκευαστή του οργάνου και συνοδεύει το κάθε όργανο.

Η ακρίβεια της ανάγνωσης εξαρτάται από τον τρόπο παροχής της τιμής της μέτρησης. Από την άποψη αυτή τα όργανα μέτρησης χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

1. τα όργανα με κλίμακα (αναλογικά όργανα) και
2. τα ψηφιακά όργανα.

Όργανα με κλίμακα:

Κατά την μέτρηση μιας ποσότητας με ένα όργανο όπου η τιμή της μέτρησης προκύπτει από την ανάγνωση της κλίμακας του οργάνου, η ακρίβεια ανάγνωσης της μέτρησης καθορίζεται από την μικρότερη υποδιαίρεση της κλίμακας του οργάνου. Γενικά, **δεν μπορούμε να μετρήσουμε κάποιο μέγεθος με ένα όργανο που διαθέτει κλίμακα με ακρίβεια καλύτερη από μια μικρή υποδιαίρεση της κλίμακας**. Κάποιος πειραματιστής με πείρα στην λήψη τέτοιων μετρήσεων μπορεί να εκτιμήσει την ακρίβεια της μέτρησης το πολύ ίση με μισή μικρή υποδιαίρεση της κλίμακας.

Όργανα με κλίμακα και βερνιέρο

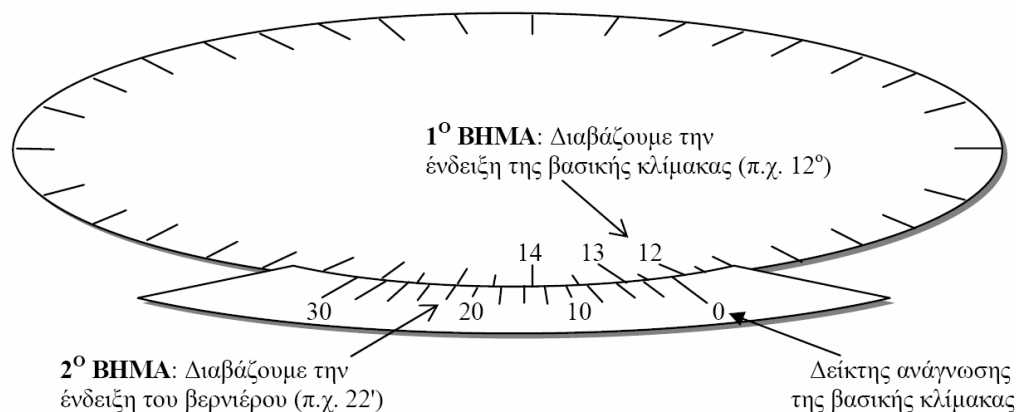
Μερικά όργανα μέτρησης με κλίμακα φέρουν, εκτός από την βασική κλίμακα, και μια δεύτερη μικρότερη κλίμακα η οποία μπορεί να κινείται κατά μήκος της βασικής κλίμακας. Αυτή η δεύτερη κλίμακα λέγεται *βερνιέρος* και μας επιτρέπει να μειώσουμε το σφάλμα ανάγνωσης του οργάνου. Το μήκος της κλίμακας του βερνιέρου αντιστοιχεί σε μια μικρή υποδιαίρεση της βασικής κλίμακας. **Το σφάλμα ανάγνωσης στα όργανα με βερνιέρο είναι ίσο με μια υποδιαίρεση της κλίμακας του βερνιέρου.**

Η χρήση του βερνιέρου έχει ως εξής, σχήματα 4.1 (ευθύγραμμη κλίμακα) και 4.2 (κυκλική κλίμακα): Το μηδέν του βερνιέρου παίζει τον ρόλο του δείκτη ανάγνωσης της βασικής κλίμακας. Στην συνέχεια, αναζητούμε ποιά από τις γραμμές του βερνιέρου ευθυγραμμίζεται με μια από τις γραμμές της βασικής κλίμακας. Αυτή η γραμμή μας δίνει την ένδειξη του βερνιέρου. Τέλος, προσθέτουμε την ένδειξη της βασικής κλίμακας και της κλίμακας του βερνιέρου.

Παράδειγμα: Στο σχήμα 4.1, το μηδέν του βερνιέρου δίνει σαν ένδειξη της βασικής κλίμακας την τιμή 20 mm. Η τρίτη υποδιαίρεση του βερνιέρου ταυτίζεται με



Σχήμα 4.1 Μέτρηση με την χρήση βερνιέρου (ευθύγραμμη κλίμακα).



3^ο ΒΗΜΑ: Προσθέτουμε τις δύο ενδείξεις και παίρνουμε την τιμή: 12° 22'

Σχήμα 4.2 Μέτρηση με την χρήση βερνιέρου (κυκλική κλίμακα).

μια γραμμή της βασικής κλίμακας, άρα η ένδειξη του βερνιέρου είναι 3. Η κλίμακα του βερνιέρου αντιστοιχεί σε μήκος ίσο με 1 mm. Συνεπώς, η ένδειξη 3 του βερνιέρου ισούται με 0,3 mm. Το σφάλμα ανάγνωσης του βερνιέρου είναι ± 1 υποδιαίρεση ή $\pm 0,1$ mm. Η ένδειξη του οργάνου είναι $(20,3 \pm 0,1)$ mm.

Ψηφιακά όργανα:

Στα ψηφιακά όργανα, η τιμή της μέτρησης δίνεται σαν ένας αριθμός στην περιοχή απεικόνισης (display) του οργάνου. Είναι προφανές ότι *δεν μπορούμε να διαβάσουμε την ένδειξη με ακρίβεια καλύτερη από μια μονάδα του τελευταίου λιγότερου σημαντικού ψηφίου του display*.

Σφάλματα της ραδιενέργειας:

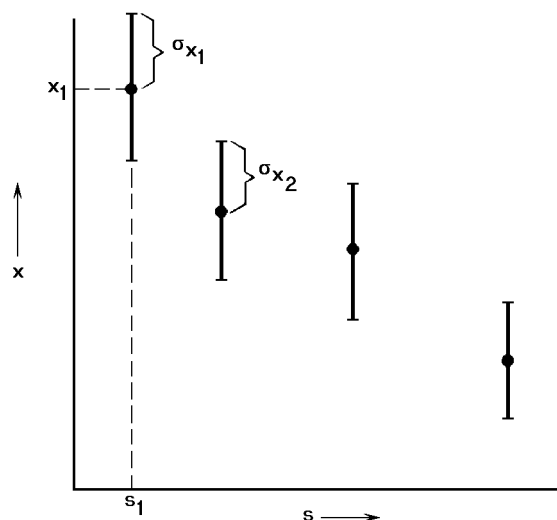
Η ραδιενέργεια είναι στατιστικό φαινόμενο με την έννοια ότι ενώ υπάρχει κάποια καθορισμένη πιθανότητα να διασπαστεί ένας πυρήνας στην μονάδα του χρόνου, δεν γνωρίζουμε την χρονική στιγμή κατά την οποία θα συμβεί αυτό. Αυτό έχει σαν συνέπεια, όταν μετράμε την ενεργότητα ενός δείγματος (ο χρόνος ημισείας ζωής του δείγματος θα πρέπει να είναι πολύ μεγάλος σε σχέση με την διάρκεια της μέτρησης) οι μετρήσεις μας να μην είναι ίδιες αλλά να κυμαίνονται γύρω από μια τιμή. Η στατιστική της απαρίθμησης προβλέπει ότι *αν M είναι μια μετρούμενη ποσότητα ενεργότητας, τότε το σφάλμα στο M είναι ίσο με την τετραγωνική ρίζα του M* ή:

$$\sigma_M = \sqrt{M}$$

Αυτή η απλή σχέση ισχύει μόνον όταν το M είναι μετρούμενη ποσότητα. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση όπου το M δεν είναι μετρούμενη ποσότητα αλλά προκύπτει από υπολογισμούς, η παραπάνω σχέση δεν ισχύει για την εκτίμηση του σφάλματος του M . Στην περίπτωση αυτή καταφεύγουμε στην μετάδοση του σφάλματος, όπως περιγράφεται στο επόμενο κεφάλαιο.

Όταν ένα σύνολο μετρήσεων παρουσιάζεται γραφικά, τα σφάλματα που συνδέονται με κάθε μέτρηση απεικονίζονται επίσης στο ίδιο διάγραμμα. Στο σχήμα 4.3 παρουσιάζεται ένα υποθετικό σύνολο μετρήσεων μιας ποσότητας x σαν συνάρτηση

20 Εισαγωγή στην θεωρία των σφαλμάτων



Σχήμα 4.3 Γραφική παράσταση των error bar που συνδέονται με κάποια πειραματικά δεδομένα.

μιας μεταβλητής ή παραμέτρου s . Τα δεδομένα των μετρήσεων παρουσιάζονται σαν σημεία, ενώ το σφάλμα κάθε σημείου δείχνεται από το μήκος του 'error bar' γύρω από κάθε σημείο. Έχει καθιερωθεί το μήκος του error bar να είναι ίσο με μια τιμή του σ σε κάθε πλευρά του σημείου, ή το ολικό μήκος του error bar να είναι ίσο με 2σ . Κάτω από αυτές τις συνθήκες, αν κανείς προσπαθήσει να προσαρμόσει μια υποθετική συνάρτηση $x = f(s)$, η συνάρτηση θα πρέπει να διέρχεται από το 68% (περίπου 2/3) όλων των error bar των πειραματικών σημείων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΤΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Είδαμε προηγουμένως πως μπορούμε να εκτιμήσουμε τα σφάλματα των πειραματικών μεγεθών. Όμως, πολύ συχνά είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε άλλες ποσότητες από τα πειραματικά μας δεδομένα. Τα αποτελέσματα των υπολογισμών μας έχουν κάποια αβεβαιότητα η οποία προέρχεται από την αβεβαιότητα (σφάλμα) των πειραματικών δεδομένων.

Έτσι, πρέπει να γνωρίζουμε τον τρόπο με τον οποίο τα σφάλματα των πειραματικών μας δεδομένων διαδίδονται μέσω των υπολογισμών αυτών και αντανakλώνται στην αντίστοιχη αβεβαιότητα των παραγόμενων ποσοτήτων. Μπορεί να αποδειχθεί ότι, αν τα σφάλματα είναι μικρά και συμμετρικά περί το μηδέν, μπορεί να ληφθεί ένα γενικό αποτέλεσμα του αναμενόμενου σφάλματος μιας εξ υπολογισμών ποσότητας που εξαρτάται από κάποιον αριθμό ανεξάρτητων μεταβλητών. Αν x, y, z, \dots είναι πειραματικές ποσότητες με σφάλματα $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \dots$, τότε η σπάνταρ απόκλιση μιας ποσότητας u η οποία παράγεται από αυτές μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση:

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \dots \quad (5.1)$$

όπου η $u = u(x, y, z, \dots)$ παριστάνει κάποια παραγόμενη ποσότητα. Η σχέση (5.1) είναι γενικά γνωστή σαν *τύπος μετάδοσης του σφάλματος*. Οι μεταβλητές x, y, z, \dots πρέπει να είναι ανεξάρτητες ώστε να αποφεύγονται οι αλληλεπιδράσεις των αλληλοσυσχετίσεων. Η χρήση της σχέσης (5.1) μπορεί να δειχθεί σε μερικές απλές περιπτώσεις.

1. Άθροισμα και διαφορά πειραματικών ποσοτήτων.

Αν ορίσουμε:

$$u = x + y \quad \text{ή} \quad u = x - y$$

τότε:

22 Εισαγωγή στην θεωρία των σφαλμάτων

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \pm 1$$

Εφαρμόζοντας την σχέση (5.1):

$$\sigma_u^2 = (1)^2 \sigma_x^2 + (\pm 1)^2 \sigma_y^2 \quad \text{ή}$$
$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \quad (5.2)$$

Έτσι, στην περίπτωση αθροίσματος ή διαφοράς πειραματικών ποσοτήτων **τα σφάλματα στο x και στο y αθροίζονται τετραγωνικά για να δώσουν το τετράγωνο του σφάλματος της u .**

2. Πολλαπλασιασμός ή διαίρεση με μια σταθερά.

Αν ορίσουμε:

$$u = Ax \quad \text{ή} \quad v = \frac{x}{B}$$

όπου A και B σταθερές (δεν έχουν σφάλμα) τότε:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A \quad \text{και} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{B}$$

Και η εφαρμογή της σχέσης (5.1) δίνει:

$$\sigma_u = A\sigma_x \quad \text{ή} \quad \sigma_v = \frac{\sigma_x}{B} \quad (5.3)$$

δηλαδή, **το τελικό σχετικό σφάλμα (σ_u/u ή σ_v/v) είναι το ίδιο με το σχετικό σφάλμα της πειραματικής ποσότητας (σ_x/x).**

3. Πολλαπλασιασμός ή διαίρεση πειραματικών ποσοτήτων.

Στην περίπτωση:

$$u = xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x$$

Από την σχέση (5.1) έχουμε:

$$\sigma_u^2 = y^2 \sigma_x^2 + x^2 \sigma_y^2$$

ή διαιρώντας και τα δύο μέλη με $u^2 = x^2 y^2$:

$$\left(\frac{\sigma_u}{u}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 \quad (5.4)$$

Παρομοίως, αν:

$$u = \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{1}{y}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(-\frac{x}{y^2}\right)^2 \sigma_y^2$$

ή διαιρώντας και τα δύο μέλη με $u^2 = x^2/y^2$:

$$\left(\frac{\sigma_u}{u}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 \quad (5.5)$$

Έτσι, στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού ή της διαίρεσης πειραματικών ποσοτήτων *τα σχετικά σφάλματα στο x και στο y αθροίζονται τετραγωνικά για να δώσουν το τετράγωνο του σχετικού σφάλματος της u .*

4. Μέση τιμή ενός συνόλου ανεξάρτητων μετρήσεων.

Η μέση τιμή ενός συνόλου N ανεξάρτητων μετρήσεων δίνεται από την σχέση:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα των περιπτώσεων 1 και 2 προκύπτει:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N \sigma_{x_i}^2} \quad (5.6)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ (FITTING) ΚΑΜΠΥΛΩΝ

Σε πολλά πειράματα ερευνάται η σχέση μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών που περιγράφουν μια φυσική ποσότητα, $y = f(x_1, x_2, \dots)$, μετρώντας την τιμή του y για διαφορετικές τιμές των x_1, x_2, \dots . Στην συνέχεια, απαιτείται να βρεθούν οι παράμετροι της θεωρητικής καμπύλης που περιγράφουν καλύτερα τα πειραματικά σημεία. Για παράδειγμα, για να μετρηθεί ο χρόνος ημισείας ζωής ενός ραδιενεργού μετριέται ο αριθμός των γεγονότων N_1, N_2, \dots, N_n σε διάφορους χρόνους t_1, t_2, \dots, t_n . Η σχέση μεταξύ του αριθμού των γεγονότων και του χρόνου είναι:

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{\ln 2 t}{T_{1/2}}\right)$$

Επειδή ο αριθμός των γεγονότων υπόκειται σε στατιστικές διακυμάνσεις, οι τιμές των N_i θα έχουν κάποιο σφάλμα σ_i . Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα όλα τα σημεία να μην κείνται επάνω σε μια ομαλή καμπύλη. Ποιά είναι η καλύτερη καμπύλη, ή ισοδύναμα οι καλύτερες τιμές των $T_{1/2}$ και N_0 και πως θα προσδιοριστούν αυτές; Η πιο χρήσιμη μέθοδος για να γίνει αυτό είναι η μέθοδος των *ελαχίστων τετραγώνων*.

I. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύνολο n πειραματικών σημείων (x_i, y_i) και ότι το σφάλμα σε κάθε y_i είναι σ_i . Έστω επίσης ότι το y εξαρτάται από το x σύμφωνα με την σχέση:

$$y_i = f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_m)$$

όπου a_1, a_2, \dots, a_m είναι άγνωστες παράμετροι που πρέπει να προσδιοριστούν έτσι ώστε η f να περιγράφει καλύτερα τα πειραματικά μας σημεία. Φυσικά, **ο αριθμός των πειραματικών σημείων θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των παραμέτρων αυτών**. Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων λέει ότι οι καλύτερες τιμές των a_i είναι εκείνες για τις οποίες το άθροισμα:

$$S = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - f(x_i; a_j)}{\sigma_i} \right)^2 \quad (6.1)$$

γίνεται ελάχιστο. Εξετάζοντας την σχέση (6.1) μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι είναι το άθροισμα των τετραγωνικών αποκλίσεων των πειραματικών σημείων από την $f(x)$ με βάρος το αντίστοιχο σφάλμα της κάθε τιμής του y_i . Ο αναγνώστης μπορεί να αναγνωρίσει την σχέση αυτή σαν την έκφραση του χ^2 , σχέση (3.15). Για τον λόγο αυτό, η μέθοδος αναφέρεται μερικές φορές σαν *ελαχιστοποίηση του χ^2* . Μιλώντας αυστηρά, για να είναι το S ίδιο με το χ^2 θα πρέπει τα y_i να έχουν κατανομή Gauss με μέση τιμή $f(x_i; a_j)$ και διακύμανση σ_i^2 . Όμως, αυτό ισχύει σχεδόν πάντα στις μετρήσεις της Φυσικής και τις περισσότερες φορές αυτό είναι σωστό. Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων είναι γενική και δεν απαιτεί την γνώση της κατανομής. Αν η κατανομή είναι γνωστή, τότε μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος της μέγιστης πιθανότητας. Για την περίπτωση της κατανομής Gauss και οι δύο μέθοδοι δίνουν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα.

Για να βρούμε τις τιμές των a_j πρέπει να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0 \quad (6.2)$$

Ανάλογα με την μορφή της $f(x)$, το σύστημα των εξισώσεων (6.2) μπορεί να έχει ή να μην έχει αναλυτική λύση. Γενικά, για να ελαχιστοποιηθεί η S πρέπει να χρησιμοποιηθούν αριθμητικές μέθοδοι και υπολογιστής.

Θεωρώντας ότι έχουμε τις καλύτερες τιμές των a_j , είναι αναγκαίο να εκτιμήσουμε τα σφάλματα αυτών των παραμέτρων. Για τον λόγο αυτό πρέπει να σχηματίσουμε έναν πίνακα V_{ij} που ονομάζεται *covariance* ή *error matrix*.

$$(V^{-1})_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial a_i \partial a_j} \quad (6.3)$$

όπου οι δεύτερες παράγωγοι υπολογίζονται στο ελάχιστο (οι δεύτερες παράγωγοι σχηματίζουν τον αντίστροφο πίνακα του error matrix). Τα διαγώνια στοιχεία του V_{ij} μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι τα σφάλματα των a_j , ενώ τα μη διαγώνια στοιχεία παριστάνουν την συσχέτιση (covariance) μεταξύ των a_i και a_j . Έτσι:

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & cov(1,2) & cov(1,3) & \dots \\ \cdot & \sigma_2^2 & cov(2,3) & \dots \\ \cdot & \cdot & \sigma_3^2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

II. ΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ FITS. Η ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ

Στην περίπτωση συναρτήσεων γραμμικών ως προς τα a_i , δηλαδή όταν δεν υπάρχουν όροι που είναι γινόμενα ή πηλίκα διαφόρων a_i , το σύστημα των εξισώσεων (6.2) μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Έστω η περίπτωση μιας ευθείας γραμμής:

$$y = f(x) = a + \beta x$$

όπου a και β είναι οι παράμετροι που πρέπει να προσδιοριστούν. Σχηματίζοντας την S βρίσκουμε:

$$S = \sum \frac{(y_i - a - \beta x)^2}{\sigma_i^2} \quad (6.5)$$

Λαμβάνοντας τις μερικές παραγώγους ως προς a και β προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum \frac{(y_i - a - \beta x)}{\sigma_i^2} = 0 \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = 2 \sum \frac{(y_i - a - \beta x)x}{\sigma_i^2} = 0 \quad (6.7)$$

Για απλοποίηση ορίζουμε τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} A &= \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} & B &= \sum \frac{1}{\sigma_i^2} \\ C &= \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} & D &= \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \\ E &= \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} & F &= \sum \frac{y_i^2}{\sigma_i^2} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς, οι σχέσεις (6.6) και (6.7) γίνονται:

$$\begin{aligned} 2(-C + aA + \beta B) &= 0 \\ 2(-E + aD + \beta A) &= 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Η λύση του συστήματος είναι:

$$a = \frac{DC - EA}{DB - A^2} \quad \beta = \frac{EB - CA}{DB - A^2} \quad (6.9)$$

Όμως, δεν έχουμε τελειώσει. Πρέπει να υπολογίσουμε τα σφάλματα στα a και β . Σχηματίζοντας τον αντίστροφο πίνακα του error matrix έχουμε:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

όπου:

$$A_{11} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} \quad A_{22} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^2} \quad A_{12} = A_{21} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial \beta}$$

Αντιστρέφοντας τον πίνακα της σχέσης (6.10):

$$V = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{12} & A_{11} \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

με αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &= \frac{A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} = \frac{D}{DB - A^2} \\ \sigma_\beta^2 &= \frac{A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} = \frac{B}{DB - A^2} \\ cov(a, \beta) &= \frac{-A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} = \frac{-A}{DB - A^2} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Για να τελειώσει η διαδικασία είναι απαραίτητο να έχουμε μια ιδέα για την ποιότητα του fit. Αντιστοιχούν τα δεδομένα στην συνάρτηση $f(x)$ που έχουμε υποθέσει; Αυτό μπορεί να ελεγχθεί μέσω του χ^2 . Αυτό είναι η τιμή της S στο ελάχιστο. Επιστρέφοντας στην κατανομή του χ^2 είχαμε δει ότι αν τα δεδομένα αντιστοιχούν στην συνάρτηση και οι αποκλίσεις έχουν κατανομή Gauss, η S πρέπει να ακολουθεί την κατανομή του χ^2 . Στο παραπάνω πρόβλημα είχαμε n πειραματικά σημεία από τα οποία εξήχθησαν m παράμετροι. Έτσι, οι βαθμοί ελευθερίας είναι $\nu = n - m$. Στην περίπτωση της ευθείας γραμμής $m = 2$ και $\nu = n - 2$. Έτσι, αναμένουμε η τιμή της S να είναι κοντά στο $\nu = n - 2$ για ένα καλό fit. Αν υπολογίσουμε το χ^2 ανά βαθμό ελευθερίας:

$$\frac{\chi^2}{\nu} = \frac{S}{\nu} \quad (6.13)$$

αυτό πρέπει να είναι κοντά στην μονάδα για ένα καλό fit.

Ένας πιο αυστηρός έλεγχος είναι να βρούμε την πιθανότητα να λάβουμε τιμή του χ^2 μεγαλύτερη από την S , δηλαδή $P(\chi^2 \geq S)$. Αυτό απαιτεί την ολοκλήρωση της κατανομής του χ^2 ή την χρήση κατάλληλων πινάκων. Γενικά, αν η $P(\chi^2 \geq S)$ είναι μεγαλύτερη από 5% το fit μπορεί να γίνει αποδεκτό. Πέρα από το σημείο αυτό πρέπει να απαντηθούν κάποιες ερωτήσεις.

Ένα εξ ίσου σημαντικό σημείο που πρέπει να δούμε είναι η περίπτωση του πολύ μικρού S . Αυτό σημαίνει ότι τα πειραματικά σημεία δεν έχουν ικανοποιητική διασπορά. Αποκλείοντας παραπονημένα δεδομένα, η πιο πιθανή αιτία είναι η υπερεκτίμηση των σφαλμάτων των πειραματικών σημείων. Σε ένα αποδεκτό fit, λαμβάνοντας υπ' όψη το σφάλμα, πρέπει περίπου το 1/3 των πειραματικών σημείων να είναι εκτός της καλύτερης καμπύλης.

A. Το γραμμικό fit όταν και οι δύο μεταβλητές έχουν σφάλμα

Στα προηγούμενα θεωρήσαμε ότι οι ανεξάρτητες μεταβλητές x_i είναι πλήρως απαλλαγμένες από σφάλματα. Μιλώντας αυστηρά, αυτό δεν συμβαίνει ποτέ, αν και σε πολλές περιπτώσεις τα σφάλματα των x_i είναι μικρά σε σχέση με τα αντίστοιχα σφάλματα των y_i , ώστε να μπορούν να θεωρηθούν αμελητέα. Όμως, στις περιπτώσεις όπου και τα δύο σφάλματα είναι συγκρίσιμα, αγνοώντας το σφάλμα στα x_i οδηγούμαστε σε μη σωστές παραμέτρους και σε υποεκτίμηση του σφάλματός τους. Στην περίπτωση αυτή, το σφάλμα σ_i της σχέσης (6.1) αντικαθίσταται με:

$$\sigma_i^2 = \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 \quad (6.14)$$

όπου σ_x και σ_y είναι τα σφάλματα των x και y αντίστοιχα. Επειδή η παράγωγος είναι συνήθως συνάρτηση των a_i , η S είναι μη γραμμική και πρέπει να χρησιμοποιηθούν αριθμητικές μέθοδοι για την ελαχιστοποίηση της S .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΓΕΝΙΚΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τελειώνοντας, θα θέλαμε να δώσουμε κάποιους γενικούς κανόνες για την στρογγυλοποίηση των αριθμητικών δεδομένων για την τελική τους παρουσίαση.

Ο αριθμός των ψηφίων που πρέπει να διατηρηθούν σε ένα αριθμητικό αποτέλεσμα εξαρτάται από τα σφάλματα του αποτελέσματος. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η τιμή της ποσότητας x μετά από τις μετρήσεις και τους υπολογισμούς προέκυψε ίση με $x = 17,615334$ και το σφάλμα της $\sigma_x = 0,0233$. Το σφάλμα μας λέει ότι το αποτέλεσμα είναι αβέβαιο στο δεύτερο δεκαδικό ψηφίο, με συνέπεια όλα τα άλλα ψηφία που ακολουθούν να μην έχουν κανένα νόημα. Έτσι, το αποτέλεσμα πρέπει να στρογγυλοποιηθεί σύμφωνα με το σφάλμα.

Η στρογγυλοποίηση εφαρμόζεται επίσης και στο εξ υπολογισμών σφάλμα. Φυσικά, μόνο το πρώτο σημαντικό ψηφίο έχει κάποιο νόημα, αλλά, εν γένει, είναι καλή ιδέα να κρατάμε δύο ψηφία (αλλά όχι παραπάνω) για την περίπτωση που τα αποτελέσματα χρησιμοποιούνται σε κάποια επιπλέον ανάλυση. Το επιπλέον ψηφίο βοηθά στο να αποφύγουμε τα συσσωρευτικά σφάλματα στρογγυλοποίησης. Έτσι, στο προηγούμενο παράδειγμα, το σφάλμα στρογγυλοποιείται στο $\sigma = 0,0233 \rightarrow 0,023$. Συνεπώς, το αποτέλεσμα του x δίνεται το πολύ με τρία δεκαδικά ψηφία.

Μια γενική μέθοδος στρογγυλοποίησης των αριθμών είναι να πάρουμε τα ψηφία που απορρίπτονται και να βάλουμε ένα κόμμα μπροστά από αυτά. Τότε:

1. Αν το κλάσμα που σχηματίζεται είναι μικρότερο από 0,5, το τελευταίο σημαντικό ψηφίο διατηρείται ως έχει.
2. Αν το κλάσμα που σχηματίζεται είναι μεγαλύτερο από 0,5, το τελευταίο σημαντικό ψηφίο αυξάνεται κατά μονάδα.
3. Αν το κλάσμα που σχηματίζεται είναι ίσο με 0,5, το τελευταίο σημαντικό ψηφίο αυξάνεται κατά μονάδα αν είναι περιττό, ή διατηρείται ως έχει αν είναι άρτιο.

Στο προηγούμενο παράδειγμα πρέπει να κρατήσουμε τρία δεκαδικά ψηφία. Τα ψηφία που πρέπει να απορριφθούν είναι 334. Τοποθετώντας ένα κόμμα μπροστά από

30 Εισαγωγή στην θεωρία των σφαλμάτων

αυτό προκύπτει 0,334. Επειδή αυτό είναι μικρότερο από 0,5, το αποτέλεσμα της στρογγυλοποίησης είναι:

$$x = 17,615 \pm 0,023$$

Κάτι που πρέπει να αποφεύγουμε είναι η στρογγυλοποίηση με βήμα ενός ψηφίου κάθε φορά. Για παράδειγμα, έστω ο αριθμός 2,346 που πρέπει να στρογγυλοποιηθεί διατηρώντας ένα δεκαδικό ψηφίο. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο που έχει προαναφερθεί προκύπτει $2,345 \rightarrow 2,3$. Όμως, στρογγυλοποιώντας ένα ψηφίο κάθε φορά προκύπτει:

$$2,345 \rightarrow 2,35 \rightarrow 2,4!$$

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΤΑΘΕΡΑΣ ΤΟΥ PLANCK

(με την βοήθεια του φωτοηλεκτρικού φαινομένου)

Σκοπός της άσκησης είναι ο προσδιορισμός της σταθεράς του Planck. Η σταθερά του Planck είναι μια πολύ σημαντική σταθερά, αφού υπεισέρχεται σε όλους σχεδόν τους τύπους της Κβαντικής Φυσικής, αποτελώντας, έτσι, ένα βασικό χαρακτηριστικό του μικρόκοσμου. Μια από τις μεθόδους προσδιορισμού της είναι το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο.

I. ΘΕΩΡΙΑ

A. Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και η κβαντική φύση του φωτός

Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο ονομάζεται η αλληλεπίδραση φωτονίου – ύλης με δέσμια ηλεκτρόνια. Η αλληλεπίδραση αυτή έχει σαν συνέπεια την εκπομπή ηλεκτρονίων από διάφορα υλικά (κυρίως μέταλλα), όταν προσπίπτει σ' αυτά φωτεινή ακτινοβολία κατάλληλου μήκους κύματος.

Τα κύρια πειραματικά χαρακτηριστικά του φωτοηλεκτρικού φαινομένου είναι:

1. Η εκπομπή των φωτοηλεκτρονίων γίνεται ακαριαία, δηλαδή χωρίς καμιά μετρήσιμη χρονική καθυστέρηση από την πρόσπτωση της ακτινοβολίας.
2. Ο αριθμός των φωτοηλεκτρονίων που εκπέμπονται είναι ανάλογος της έντασης της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.
3. Η κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων έχει συνεχές φάσμα, με τιμές από το μηδέν ως μια συγκεκριμένη τιμή T_{max} . Η T_{max} είναι ανεξάρτητη από την ένταση της φωτεινής δέσμης και αυξάνεται γραμμικά με την συχνότητα ν της ακτινοβολίας.
4. Υπάρχει μια χαρακτηριστική συχνότητα κατωφλίου ν_0 (που εξαρτάται μόνο από το υλικό) κάτω από την οποία το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο δεν γίνεται, οσοδήποτε μεγάλη και αν γίνει η ένταση της ακτινοβολίας.

34 Μέτρηση της σταθεράς του Planck

Το φαινόμενο, γνωστό ήδη από το τέλος του 19ου αιώνα, αποτέλεσε μια από τις κυριότερες ενδείξεις των αδυναμιών της κλασικής φυσικής. Η ερμηνεία του έγινε δυνατή μόνο στα πλαίσια της κβαντικής φυσικής και συγκεκριμένα μετά την εισαγωγή της άποψης για την ενεργειακή κβάντωση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Η ιδέα προτάθηκε το 1900 από τον Planck (βραβείο Nobel, 1918), ο οποίος, για να εξηγήσει την μορφή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος του μέλανος σώματος, θεώρησε ότι η ενέργεια των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, κατά την εκπομπή ή την απορρόφηση τους από το μέλαν σώμα, μεταβάλλεται ασυνεχώς, δηλαδή κατά μικρές αδιαίρετες ποσότητες E τις οποίες ονόμασε κβάντα. Η ενέργεια E του κάθε κβάντου βρέθηκε ότι εξαρτάται μόνο από την συχνότητα ν της ακτινοβολίας, σύμφωνα με την σχέση:

$$E = h\nu \quad (1.1)$$

Η σταθερά αναλογίας h ονομάστηκε σταθερά του Planck και έχει τιμή:

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad \text{ή}$$

$$h = 4,136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$$

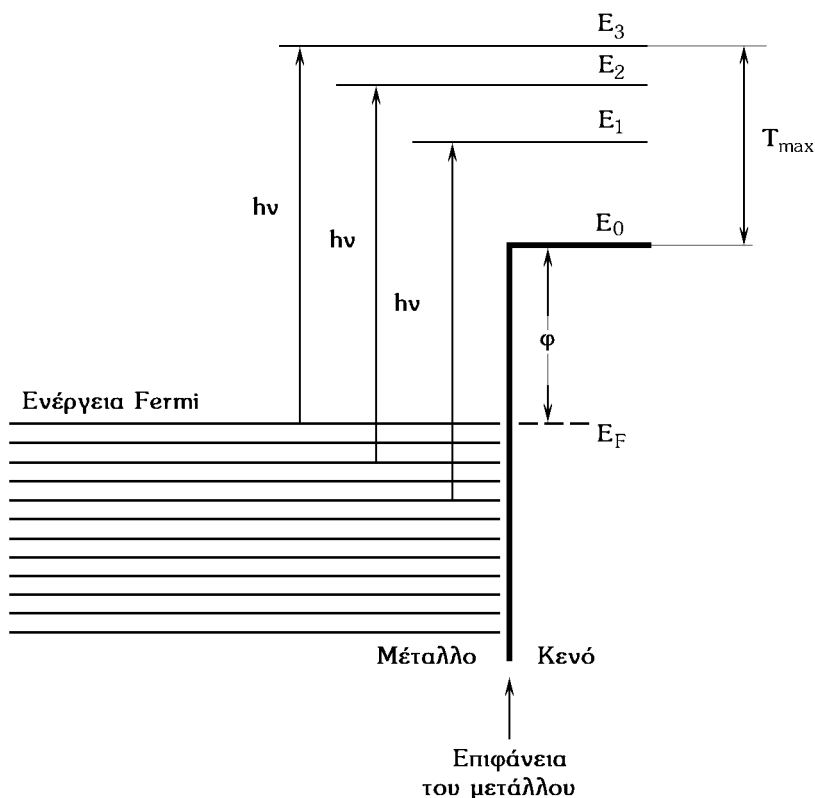
Η ερμηνεία του φωτοηλεκτρικού φαινομένου δόθηκε το 1905 από τον Einstein (βραβείο Nobel, 1921), ο οποίος χρησιμοποίησε και επεξέτεινε την ιδέα του Planck για την κβάντωση της ενέργειας, θεωρώντας ότι το κάθε κβάντο της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας είναι μια αυτόνομη οντότητα, ένα είδος σωματιδίου, ανεξάρτητο από τον εκπομπό ή από τον δέκτη της ακτινοβολίας. Τα κβάντα του φωτός ονομάστηκαν *φωτόνια*.

Στην γλώσσα των φωτονίων, το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο έχει ως εξής: το κάθε φωτόνιο, δρώντας ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα φωτόνια της δέσμης, μπορεί να δώσει όλη την ενέργειά του σε ένα δέσμιο ηλεκτρόνιο του υλικού και να προκαλέσει την εξαγωγή του. Για να συμβεί αυτό, πρέπει η ενέργεια του φωτονίου $h\nu$ να είναι ίση ή μεγαλύτερη από το έργο w που απαιτείται για την απόσπαση του συγκεκριμένου ηλεκτρονίου από το υλικό. Το φωτοηλεκτρόνιο, μετά την έξοδό του, κινείται πλέον ελεύθερα στον χώρο, έχοντας κινητική ενέργεια T ίση με το υπόλοιπο της ενέργειας του φωτονίου:

$$T = h\nu - w \quad (1.2)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι το έργο w διαφέρει από ηλεκτρόνιο σε ηλεκτρόνιο. Αυτό οφείλεται στην ποικιλία των ενεργειακών καταστάσεων των ηλεκτρονίων μέσα στο στερεό. Έτσι, το w είναι μεγάλο για τα ηλεκτρόνια που είναι ισχυρά συνδεδεμένα στα άτομα του υλικού και μικρότερο για τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας που είναι δέσμια στο σύνολο του υλικού. Αλλά και τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας δεν έχουν όλα την ίδια ενέργεια. Η ενέργειά τους παίρνει διάφορες τιμές, με μέγιστη (στην θερμοκρασία του απολύτου μηδενός) την ενέργεια Fermi, σχήμα 1.1. Επίσης, διαφορετική είναι και η απώλεια της ενέργειας, λόγω των εσωτερικών σκεδάσεων που υφίστανται τα ηλεκτρόνια κατά την έξοδό τους από διαφορετικά βάρη του υλικού. Το ελάχιστο έργο που απαιτείται για την διαφυγή από ένα μέταλλο των ηλεκτρονίων της στάθμης Fermi ονομάζεται *έργο εξόδου* φ και είναι μια ποσότητα χαρακτηριστική του κάθε μετάλλου. Προφανώς, όταν $w = \varphi$, η κινητική ενέργεια του εκπεμπόμενου ηλεκτρονίου γίνεται μέγιστη, οπότε η σχέση (1.2) γράφεται:

$$T_{max} = h\nu - \varphi \quad (1.3)$$



Σχήμα 1.1 Η ενεργειακή κατάσταση των ηλεκτρονίων σε ένα μέταλλο. Η ενεργειακή στάθμη του κενού είναι $E_0 = \varphi + E_F$. Όταν στο μέταλλο προσπίπτουν φωτόνια συχνότητας ν όλα τα ηλεκτρόνια προσλαμβάνουν την ίδια ενέργεια $h\nu$. Όμως, η κινητική τους ενέργεια δεν είναι ίδια. Η ενέργεια E_3 αντιστοιχεί στα φωτοηλεκτρόνια με την μέγιστη κινητική ενέργεια $T_{max} = h\nu - \varphi$.

Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή σαν *φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein* και είναι απόρροια της εφαρμογής της αρχής της διατήρησης της ενέργειας για το κάθε απορροφώμενο φωτόνιο. Αν, τώρα, εφαρμόσουμε την αρχή της διατήρησης της ορμής στο σύστημα φωτονίου – ηλεκτρονίου (το φωτόνιο έχει ορμή $h\nu/c$, όπου $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό), θα διαπιστώσουμε ότι το φαινόμενο δεν είναι δυνατό να συμβεί με ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο. Το ηλεκτρόνιο που συμμετέχει στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο πρέπει απαραίτητα να είναι συνδεδεμένο σε κάποιο άλλο σώμα (άτομο ή στερεό) ο ρόλος του οποίου είναι να προσλάβει την ορμή ανάκρουσης.

Η χαρακτηριστική συχνότητα κατωφλίου ν_0 προκύπτει, θεωρητικά, από την σχέση (1.3), αν γνωρίζουμε το έργο εξόδου φ του υλικού. Θεωρώντας ότι πρέπει $T_{max} \geq 0$, προκύπτει $h\nu \geq \varphi$, ή ισοδύναμα:

$$\nu \geq \frac{\varphi}{h} = \nu_0 \quad (1.4)$$

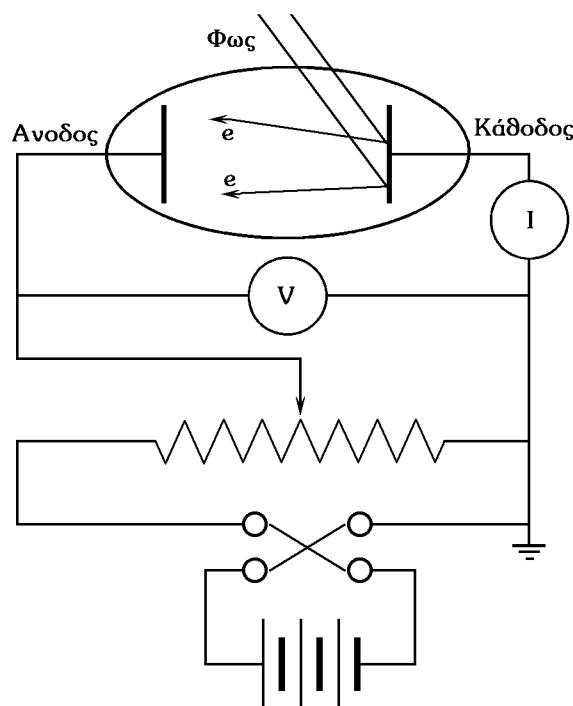
Επειδή το έργο εξόδου φ είναι συνήθως μεταξύ 2 και 5 eV, γίνεται φανερό ότι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που προσπίπτει πρέπει να έχει συχνότητα μεγαλύτερη από $2 \text{ eV}/h = 0,5 \times 10^{15} \text{ Hz}$ για να προκαλέσει φωτοηλεκτρικό φαινόμενο στα διάφορα υλικά. Πρέπει, δηλαδή, να ανήκει στην περιοχή του ορατού φωτός προς το ιώδες, ή στην περιοχή του υπεριώδους. Ας σημειωθεί ότι, επειδή το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο μπορεί να συμβεί και με τα ισχυρά δέσμια ηλεκτρόνια των εσωτερικών φλοιών των ατόμων, δεν υπάρχει συγκεκριμένο άνω όριο στην συχνότητα ή στην ε-

νέργεια της ακτινοβολίας, απλά η πιθανότητα να συμβεί το φαινόμενο μειώνεται σημαντικά με την ενέργεια μέχρις ότου, στην περιοχή των MeV, γίνεται πρακτικά αμελητέα σε σχέση με την πιθανότητα των άλλων τρόπων αλληλεπίδρασης της ακτινοβολίας με την ύλη.

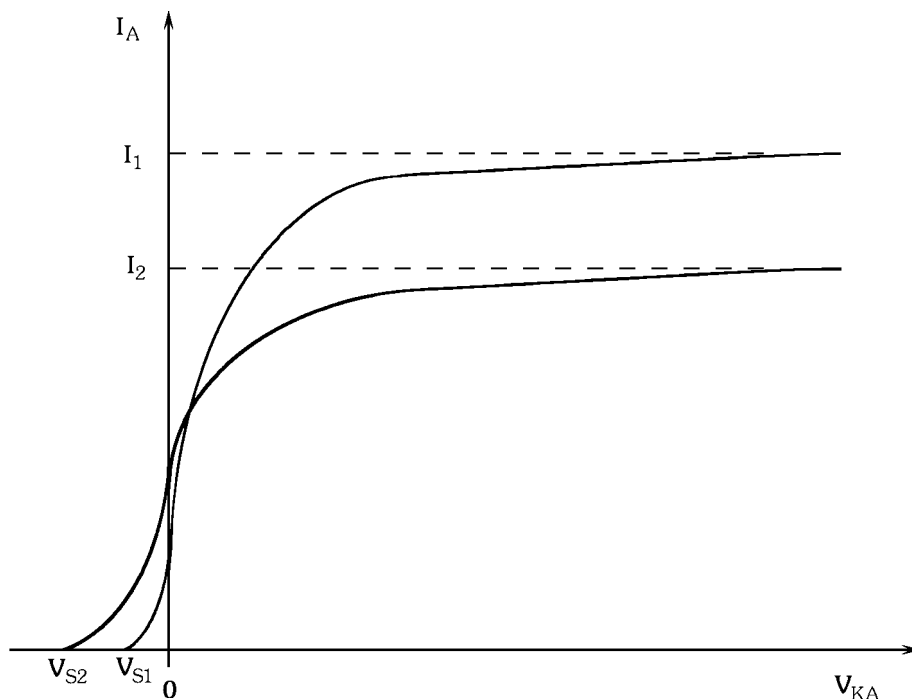
B. Το φωτοκύτταρο και η μέτρηση της σταθεράς του Planck

Η καταλληλότερη διάταξη για την μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου είναι το φωτοκύτταρο, σχήμα 1.2. Αυτό είναι μια αερόκενη δίοδος ηλεκτρονική λυχνία, την κάθοδο της οποίας αποτελεί μια φωτοευαίσθητη μεταλλική επιφάνεια. Για να είναι η διάταξη ευαίσθητη και στην υπεριώδη ακτινοβολία, η λυχνία είναι κατασκευασμένη από χαλαζία, ένα υλικό που είναι διαφανές στο υπεριώδες. Αυτό που μπορούμε να προσδιορίσουμε πειραματικά με το φωτοκύτταρο είναι η ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων που εκπέμπονται, για διάφορες συχνότητες, με την εφαρμογή ενός επιβραδύνοντος δυναμικού μεταξύ της καθόδου και της ανόδου.

Όταν στην φωτοκάθοδο πέφτει φως μιας συχνότητας μεγαλύτερης από την συχνότητα κατωφλίου ν_0 , η κάθοδος εκπέμπει φωτοηλεκτρόνια. Με ορθή πόλωση (επιταχύνον δυναμικό) τα ηλεκτρόνια δημιουργούν το ανοδικό ρεύμα, το οποίο μετράμε με ένα ευαίσθητο ηλεκτρόμετρο και συλλέγονται στην άνοδο. Το ανοδικό ρεύμα I_A σαν συνάρτηση της εφαρμοζόμενης τάσης V_{AK} δίνει την χαρακτηριστική καμπύλη του φωτοκύτταρου, σχήμα 1.3, για τα συγκεκριμένα κάθε φορά χαρακτηριστικά της προσπίπτουσας ακτινοβολίας (συχνότητα και ένταση). Για μεγάλες τιμές της τάσης παρατηρούμε ότι το φωτόρευμα σταθεροποιείται σε μια μέγιστη τιμή I_1 , αντιπροσωπευτικής της ολικής φωτοηλεκτρικής εκπομπής, ενώ για μικρές τιμές μειώνεται καθώς το επιταχύνον δυναμικό πλησιάζει το μηδέν.



Σχήμα 1.2 Η συνδεσμολογία ενός φωτοκύτταρου για την μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.



Σχήμα 1.3 Οι χαρακτηριστικές καμπύλες ρεύματος – τάσης ενός φωτοκύτταρου όταν προσπίπτουν σ’ αυτό δύο ακτινοβολίες διαφορετικής έντασης και συχνότητας ($I_1 > I_2$, $\nu_1 < \nu_2$).

Αξιοσημείωτο είναι ότι για μηδενική τάση, ή και για μικρές τιμές της επιβραδύνουσας τάσης, το φωτόρευμα εξακολουθεί να έχει κάποια θετική τιμή. Η εφαρμογή του επιβραδύνοντος δυναμικού V έχει σαν συνέπεια, τα ηλεκτρόνια που φεύγουν από την κάθοδο με ενέργεια E_i , να φτάνουν στην άνοδο με ενέργεια $E_f = E_i - eV$. Προφανώς, τα ηλεκτρόνια με αρχική ενέργεια E_i μικρότερη από eV , δεν φτάνουν στην άνοδο. Το ανοδικό ρεύμα θα μηδενιστεί όταν το επιβραδύνον δυναμικό πάρει μια κρίσιμη τιμή V_S τέτοια ώστε και τα πιο ενεργειακά ηλεκτρόνια (με αρχική ενέργεια $E_i = T_{max}$), να μη φτάνουν στην άνοδο. Για το δυναμικό αυτό ισχύει:

$$eV_S = T_{max} \quad (1.5)$$

Το δυναμικό V_S ονομάζεται **δυναμικό αποκοπής (stopping potential)** και εξαρτάται, για ένα δεδομένο φωτόκυτταρο, μόνο από την συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Πράγματι, λόγω της φωτοηλεκτρικής εξίσωσης του Einstein, σχέση (1.3), η σχέση (1.5) γίνεται:

$$eV_S = h\nu - \varphi \quad \text{ή}$$

$$V_S = \frac{h}{e}\nu - \frac{\varphi}{e} \quad (1.6)$$

Παρατηρούμε **ότι υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ του δυναμικού αποκοπής V_S και της συχνότητας ν της ακτινοβολίας**. Η κλίση της ευθείας ισούται με h/e . Θεωρώντας το φορτίο e γνωστό, μπορεί να μας δώσει την σταθερά του Planck.

Η μέτρηση της σταθεράς του Planck με τον τρόπο αυτόν έγινε για πρώτη φορά από τον Millikan το 1916. Επειδή το πείραμά του, εκτός από την ακριβή τιμή της σταθεράς του Planck που έδωσε, αποτέλεσε και μια σημαντική επιβεβαίωση της θεωρίας του Einstein για το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και την κβαντική φύση του φωτός, ο Millikan τιμήθηκε με το βραβείο Nobel το 1923.

Από την σχέση (1.6) μπορεί να προκύψει και το έργο εξόδου του υλικού της φωτοκαθόδου από την τιμή της τετμημένης επί την αρχή φ/e .

II. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από μια φωτεινή πηγή, μια οπτική διάταξη για την λήψη μονοχρωματικής ακτινοβολίας, ένα φωτοκύτταρο, τροφοδοτικά για την φωτεινή πηγή και το φωτοκύτταρο και όργανα μέτρησης της διαφοράς δυναμικού ανόδου – καθόδου (βολτόμετρο) και του ρεύματος του φωτοκύτταρου (ηλεκτρόμετρο).

Η φωτεινή πηγή αποτελείται από μια φασματική λυχνία Hg. Οι κύριες φασματικές γραμμές του Hg παρουσιάζονται στον πίνακα 1.1.

Πίνακας 1.1
Οι κύριες φασματικές γραμμές του Hg.

| Χρώμα | λ (nm) | ν (10^{12} Hz) |
|--------------|----------------|-----------------------|
| Κόκκινο | 690,8 | 434,3 |
| Κίτρινο | 577,0 | 519,9 |
| Πράσινο | 546,1 | 549,3 |
| Κυανοπράσινο | 491,6 | 610,2 |
| Κυανό | 435,8 | 688,4 |
| Ιώδες | 404,7 | 741,3 |
| Υπεριώδες | 365,1 | 819,7 |
| Υπεριώδες | 312,5 | 960,0 |
| Υπεριώδες | 253,5 | 1183,4 |

Η οπτική διάταξη που αναλύει την πολυχρωματική ακτινοβολία από την φασματική λυχνία είναι μια συστοιχία οπτικών φίλτρων, οπότε η αλλαγή της συχνότητας γίνεται με την παρεμβολή του κατάλληλου φίλτρου μεταξύ της φασματικής λυχνίας και του φωτοκύτταρου. Τα οπτικά φίλτρα που διαθέτουμε είναι οπτικά φράγματα διαπερατά σε ένα εύρος 1% περί τα μήκη κύματος: 578 nm, 546 nm, 436 nm, 405 nm και 366 nm. Επομένως, οι διαθέσιμες συχνότητες είναι, πίνακας 1.2:

Πίνακας 1.2
Μήκη κύματος των γραμμών του Hg που διέρχονται
από τα οπτικά φίλτρα.

| Φίλτρο | Χρώμα | λ (nm) | ν (10^{12} Hz) |
|--------|-----------|----------------|-----------------------|
| 1 | Κίτρινο | 577,0 | 519,9 |
| 2 | Πράσινο | 546,1 | 549,3 |
| 3 | Κυανό | 435,8 | 688,4 |
| 4 | Ιώδες | 404,7 | 741,3 |
| 5 | Υπεριώδες | 365,1 | 819,7 |

Το φωτοκύτταρο αποτελείται από μια αερόκενη λυχνία από χαλαζία, με κάθοδο επιμεταλλωμένη με κάλιο και άνοδο από πλατίνα. Είναι τοποθετημένη σε κυλινδρική μεταλλική υποδοχή, η οποία παρέχει μηχανική στήριξη, προστασία και οπτική και ηλεκτροστατική θωράκιση.

Η φωτεινή πηγή, η οπτική διάταξη και το φωτοκύτταρο είναι τοποθετημένα σε ένα φωτοστεγές κιβώτιο που τα απομονώνει από τον φωτισμό του δωματίου.

Το τροφοδοτικό χαμηλών τάσεων περιέχει στο φωτοκύτταρο ορθή πόλωση από 0 ως +12 volts και ανάστροφη πόλωση από 0 ως - 5 volts. Την τάση αυτή την μετράμε με ένα βολτόμετρο που είναι συνδεδεμένο στα ηλεκτρόδια του φωτοκύτταρου.

Η μέτρηση του φωτορεύματος, που είναι της τάξης των 10^{-11} ως 10^{-13} A, γίνεται με ένα ευαίσθητο ηλεκτρόμετρο (KEITHLEY 610 C). Λόγω της μεγάλης εσωτερικής αντίστασης του οργάνου, απαιτείται κάποιος χρόνος για την σωστή μέτρηση του ρεύματος μετά από κάθε αλλαγή της τάσης. Η ύπαρξη ρευμάτων διαρροής σε διάφορα σημεία της διάταξης (τα οποία είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το φωτόρευμα), μας υποχρεώνει να είμαστε προσεκτικοί ώστε να έχουμε καλές ηλεκτρικές επαφές και καθαρές μονώσεις, όπου απαιτείται.

Η καμπύλη του φωτορεύματος σαν συνάρτηση της τάσης δεν είναι, εν γένει, ευθεία. Για να βρεθεί το δυναμικό αποκοπής, παίρνουμε 5 – 10 ζεύγη τιμών φωτορεύματος – ανάστροφης πόλωσης και κάνουμε την γραφική παράσταση του ρεύματος σαν συνάρτηση της ανάστροφης τάσης. Η καμπύλη η οποία προκύπτει τέμνει τον άξονα της τάσης στο V_s . Το πειραματικό σφάλμα στο V_s βρίσκεται γραφικά, θεωρώντας το σφάλμα στην μέτρηση του φωτορεύματος ίσο με το σφάλμα της χρησιμοποιούμενης κλίμακας του ηλεκτρόμετρου (βλέπε Παράρτημα 1).

III. ΟΡΓΑΝΑ

1. Φωτεινή πηγή (φασματική λυχνία Hg).
2. Οπτική διάταξη για την λήψη μονοχρωματικής ακτινοβολίας (οπτικά φίλτρα).
3. Φωτοκύτταρο με κάθοδο από κάλιο.
4. Τροφοδοτικό της φωτεινής πηγής.
5. Τροφοδοτικό του φωτοκύτταρου.
6. Βολτόμετρο.
7. Ηλεκτρόμετρο, Keithley 610 C.
8. Καλώδια σύνδεσης.

IV. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

1. Αναγνωρίστε τις συσκευές. Για την περιγραφή και τα λειτουργικά χαρακτηριστικά του ηλεκτρόμετρου βλέπε στο Παράρτημα 1 (σελίδα 91).
2. Ανάψτε το τροφοδοτικό της λυχνίας Hg.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Μην σβήσετε το τροφοδοτικό της λυχνίας Hg πριν από το τέλος της άσκησης. Αν τυχόν σβήσει κατά την διάρκεια της άσκησης μην το ανάβετε αν δεν περάσουν τουλάχιστον 15 min. Μια βραχυχρόνια διακοπή της λειτουργίας της λυχνίας Hg μπορεί να την καταστρέψει.

3. Βάλτε τον διακόπτη ελέγχου μέτρησης του ηλεκτρόμετρου στην θέση LOCK και ανάψτε το όργανο (διακόπτης οργάνου στην θέση OFF). Επιλέξτε με τον διακόπτη κλίμακας B την θέση ' 10^{-11} Ampere'. Μετά από μερικά λεπτά βάλτε τον διακόπτη οργάνου στην θέση +. Κάντε διόρθωση του μηδενός.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Αλλαγή της θέσης του διακόπτη κλίμακας B σημαίνει αλλαγή της εσωτερικής αντίστασης του οργάνου. Μετρήσεις που ελήφθησαν με διαφορετικές θέσεις αυτού του διακόπτη δεν έχουν εσωτερική συνοχή.

Μετά από κάθε αλλαγή κλίμακας κάντε έλεγχο του μηδενός και διόρθωση, αν χρειάζεται.

4. Φροντίστε ώστε στην κάθοδο του φωτοκύτταρου να πέφτει μια από τις διαθέσιμες μονοχρωματικές ακτινοβολίες με την επιλογή ενός φίλτρου. Πόση είναι η ενέργεια (σε eV) των φωτονίων της ακτινοβολίας;
5. Ανάψτε το τροφοδοτικό του φωτοκύτταρου, βάλτε τάση ίση με μηδέν και μετρήστε το φωτόρρευμα. Γιατί υπάρχει ρεύμα για τάση ίση με μηδέν;
6. Πάρτε ζεύγη τιμών του φωτορεύματος σαν συνάρτηση της ορθής πόλωσης, ανά 1 volt. Σχεδιάστε την καμπύλη.
7. Πάρτε 5 – 10 ζεύγη τιμών του φωτορεύματος σαν συνάρτηση της ανάστροφης πόλωσης και σχεδιάστε την καμπύλη. Βρείτε την τάση αποκοπής V_S και την μέγιστη ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων (σε eV). Εκτιμήστε το σφάλμα στο V_S .
8. Επαναλάβετε το βήμα 7 για όλες τις διαθέσιμες συχνότητες.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Πριν ανοίξετε το φωτοστεγές κιβώτιο βεβαιωθείτε ότι ο διακόπτης ελέγχου μέτρησης του ηλεκτρόμετρου είναι στην θέση LOCK.

9. Χαράξτε το διάγραμμα της τάσης αποκοπής σαν συνάρτηση της συχνότητας του προσπίπτοντος φωτός. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων βρείτε την καλύτερη ευθεία που διέρχεται από τα πειραματικά σας σημεία. Από την κλίση και την τετμημένη επί την αρχή της ευθείας βρείτε την

Εργαστηριακές Ασκήσεις Ατομικής Φυσικής 41

σταθερά του Planck και το έργο εξόδου του καλίου, θεωρώντας την τιμή $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} = 4,803 \times 10^{-10} \text{ esu}$ για το φορτίο του ηλεκτρονίου.

10. Εξηγείστε γιατί δεν χρησιμοποιούμε την κόκκινη γραμμή του Hg.
11. Σχόλια, συμπεράσματα.

ΑΣΚΗΣΗ 3

ΠΕΙΡΑΜΑ FRANCK – HERTZ: ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ ΕΝΟΣ ΑΤΟΜΟΥ

Σκοπός της άσκησης είναι η μελέτη της σκέδασης ηλεκτρονίου – ατόμου και η ανάδειξη του τρόπου με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια στο άτομο.

I. ΘΕΩΡΙΑ

A. Διέγερση των ατόμων

Ο κυριότερος τρόπος της μεταβολής της ενεργειακής κατάστασης των ατόμων γίνεται με την εκπομπή ή την απορρόφηση ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Η διαφορά ενέργειας ΔE της αρχικής και της τελικής κατάστασης ενός ατόμου αντιστοιχεί στην ενέργεια ενός φωτονίου (η περίπτωση των δύο φωτονίων είναι εξαιρετικά σπάνια), η συχνότητα του οποίου καθορίζεται από την σχέση:

$$\Delta E = h\nu \quad (3.1)$$

όπου $h = 4,136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$ είναι η σταθερά του Planck.

Οι μετρήσεις της ατομικής φασματοσκοπίας σε μια ευρεία περιοχή συχνοτήτων, από τις ακτίνες X μέχρι και τα ραδιοφωνικά κύματα, έδειξαν ότι τόσο η εκπομπή όσο και η απορρόφηση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας γίνεται μόνο σε συγκεκριμένες διακριτές συχνότητες. Επομένως, σύμφωνα με την σχέση (3.1), η μεταβολή της ενέργειας του ατόμου γίνεται κατά καθορισμένες ποσότητες. Για παράδειγμα, η πιο χαρακτηριστική γραμμή στο φάσμα του υδραργύρου, που βρίσκεται στο υπεριώδες με μήκος κύματος 253,5 nm, από την σχέση (3.1) προκύπτει ότι αντιστοιχεί σε διαφορά ενέργειας 4,89 eV. Η γραμμή αυτή οφείλεται στην μετάπτωση από την πρώτη διεγερμένη στάθμη του Hg στην βασική.

Ένας άλλος τρόπος μεταβολής της ενέργειας των ατόμων είναι οι κρούσεις μεταξύ τους. Παράδειγμα αυτής της κατηγορίας αποτελεί ένα πολύ θερμό αέριο. Η αυξημένη 'θερμική' κινητική ενέργεια των ατόμων του αερίου είναι ικανή, με τις μεταξύ

τους συγκρούσεις, να προκαλέσει την διέγερσή τους ή ακόμη και τον ιονισμό τους. Έτσι, αέρια ή ατμοί σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες εκπέμπουν ακτινοβολία με το χαρακτηριστικό τους φάσμα.

Επίσης, οι κρούσεις οποιωνδήποτε άλλων φορτισμένων σωματιδίων με τα άτομα μπορούν να προκαλέσουν την διέγερση των ατόμων σε υψηλότερες ενεργειακές στάθμες. Κοινή εφαρμογή αυτού του τρόπου διέγερσης έχουμε στους σωλήνες ηλεκτρικής εκκένωσης (π.χ. λαμπτήρες φθορισμού). Ο χώρος στο εσωτερικό του σωλήνα περιέχει ένα αέριο σε χαμηλή πίεση, επιτρέποντας τα ηλεκτρόνια και τα θετικά ιόντα να κινούνται επιταχυνόμενα από την υψηλή τάση που εφαρμόζεται μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων του σωλήνα. Τα άτομα του αερίου γεμίματος διεγείρονται από τις κρούσεις των φορτισμένων σωματιδίων (κυρίως των ηλεκτρονίων), εκπέμποντας στην συνέχεια ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία.

Γενικά, σε όλες τις περιπτώσεις και ανεξάρτητα από τον μηχανισμό διέγερσης, **η μεταφορά ενέργειας στα άτομα γίνεται πάντα κατά διακριτές ποσότητες.**

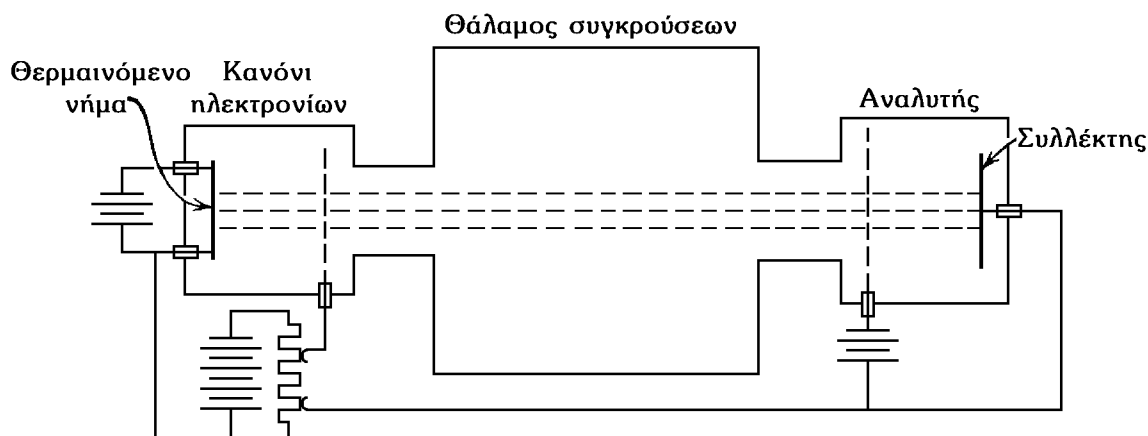
B. Διέγερση με σκεδάσεις ηλεκτρονίων καθορισμένης ενέργειας

Οι J. Franck και G. Hertz με το πείραμά τους απέδειξαν ότι, για την εκπομπή φωτονίων από τα άτομα του υδραργύρου, όταν αυτά συγκρούονται με ηλεκτρόνια, απαιτείται η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων να ξεπερνά μια ορισμένη ενέργεια. Απέδειξαν επίσης ότι οι ενεργειακές στάθμες των ατόμων είναι διακριτές. Έτσι, τα αποτελέσματα του πειράματος βοήθησαν να επιβεβαιωθεί η κβαντική θεωρία, που προέβλεπε ότι τα ηλεκτρόνια σε ένα άτομο καταλαμβάνουν μόνο καθορισμένες, κβαντισμένες, ενεργειακές καταστάσεις. Για την συμβολή τους στην κατανόηση και επιβεβαίωση της κβαντικής θεωρίας τιμήθηκαν με το βραβείο Nobel φυσικής το 1925.

Στο πείραμα Franck – Hertz επιτυγχάνεται η διέγερση των ατόμων ενός στοιχείου με τις κρούσεις που υφίστανται κατά τον βομβαρδισμό τους με ηλεκτρόνια δεδομένης ενέργειας. Πρόκειται δηλαδή για ένα πείραμα σκέδασης ηλεκτρονίων – ατόμων, με σκοπό να μελετήσουμε τις συνθήκες που απαιτούνται για την μεταφορά της κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων στα άτομα.

Η σκέδαση ηλεκτρονίων – ατόμων μπορεί να είναι *ελαστική* (η ενεργειακή κατάσταση του ατόμου παραμένει αμετάβλητη) ή *μη ελαστική* (η ενεργειακή κατάσταση του ατόμου αυξάνεται σε βάρος της κινητικής ενέργειας του ηλεκτρονίου)*. Το αν θα συμβεί ελαστική ή μη ελαστική σκέδαση εξαρτάται από την ενέργεια των ηλεκτρονίων. Κατά την ελαστική σκέδαση ενός ηλεκτρονίου με ένα άτομο σε ηρεμία, το άτομο ανακρούεται ελαφρά επειδή έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα από το ηλεκτρόνιο και παίρνει ένα αμελητέο μέρος της κινητικής ενέργειας του ηλεκτρονίου ($E_R \cong (m_0/M)E_e$). Έτσι, αν ένα ηλεκτρόνιο βγαίνει από μια σύγκρουση με σημαντική απώλεια της ενέργειάς του, τότε η σύγκρουση πρέπει να είναι μη ελαστική και η επιπλέον ενέργεια πρέπει να έχει απορροφηθεί από το άτομο. Κατά την μη ελαστική σκέδαση, η απορροφώμενη από το άτομο ενέργεια μπορεί να μετρηθεί και να συγκριθεί με την ενέρ-

* Πιο σωστά, η σκέδαση χαρακτηρίζεται σαν ελαστική ή μη ελαστική ανάλογα με το ποσό της ενέργειας που δίνεται κατά την σκέδαση στο σκεδαζόμενο σώμα. Αν η ενέργεια αυτή είναι ακριβώς ίση με την ενέργεια που προβλέπεται από την κινηματική των δύο σωμάτων, τότε η σκέδαση χαρακτηρίζεται σαν ελαστική. Όταν η ενέργεια αυτή είναι διαφορετική από την ενέργεια που προβλέπεται από την κινηματική των δύο σωμάτων, τότε η σκέδαση χαρακτηρίζεται σαν μη ελαστική.



Σχήμα 3.1 Σχηματική παράσταση της συσκευής που χρησιμοποίησαν οι Franck – Hertz για την μελέτη της απώλειας της ενέργειας των ηλεκτρονίων σε ένα αέριο.

για διέγερσης (ή αποδιέγερσης) των ατόμων, όπως αυτή προκύπτει από τις μετρήσεις φασματοσκοπίας.

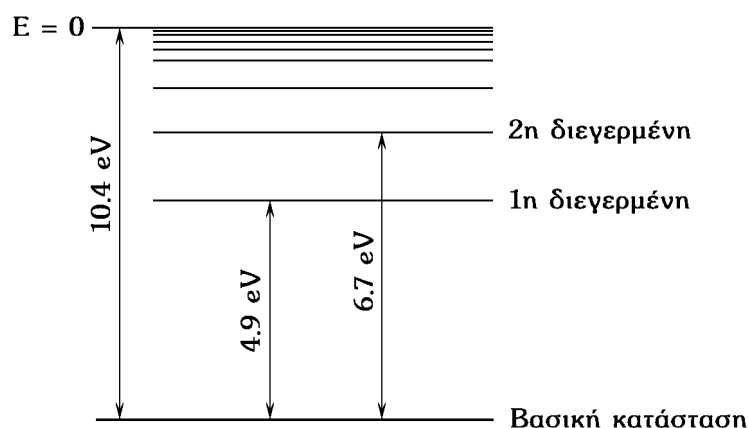
Η διάταξη του πειράματος των Franck – Hertz για την μελέτη της σκέδασης των ηλεκτρονίων παρουσιάζεται στο σχήμα 3.1. Αποτελείται από τρία κύρια μέρη:

1. Ένα κανόνι ηλεκτρονίων για την δημιουργία μιας λεπτής και μονοενεργειακής δέσμης ηλεκτρονίων. Το κανόνι των ηλεκτρονίων είναι υπό κενό, έτσι ώστε να αποφεύγονται οι συγκρούσεις των ηλεκτρονίων με τα άτομα του αερίου.
2. Έναν θάλαμο συγκρούσεων που περιέχει κάποιο ευγενές (μονοατομικό) αέριο ή ατμούς. Σε πίεση 0,01 mm Hg τα ηλεκτρόνια διανύουν περίπου 1 cm πριν συγκρουστούν με τα άτομα του αερίου. Έτσι, διατηρώντας την πίεση του αερίου χαμηλή μπορεί να ελαχιστοποιηθεί η πιθανότητα ένα ηλεκτρόνιο να συγκρουστεί περισσότερες από μια φορές καθώς διανύει τον θάλαμο συγκρούσεων.
3. Μια διάταξη για την μέτρηση της ενέργειας των ηλεκτρονίων που κατάφεραν να περάσουν από τον θάλαμο των συγκρούσεων.

Το πείραμα έδειξε, πρώτα από όλα, ότι τα ηλεκτρόνια με κινητική ενέργεια λίγα eV υφίστανται μόνο ελαστικές κρούσεις με τα άτομα*. Καθώς η ενέργεια των ηλεκτρονίων αυξάνεται, οι κρούσεις παραμένουν ελαστικές μέχρι κάποιο κατώφλι E_1 που είναι χαρακτηριστικό των ατόμων του αερίου στον θάλαμο συγκρούσεων. Για παράδειγμα, το κατώφλι αυτό ισούται με περίπου 1,6 eV για το Cs, 2,1 eV για το Na, 16,6 eV για το Ne και 4,9 eV για τον Hg και ονομάζεται πρώτο κρίσιμο δυναμικό.

Η απουσία μη ελαστικών κρούσεων για ενέργειες μικρότερες από το κατώφλι E_1 δείχνει ότι τα άτομα μετά την κρούση βρίσκονται στην ίδια ενεργειακή κατάσταση. Όταν λαμβάνουν χώρα μη ελαστικές κρούσεις, σε υψηλότερες ενέργειες των ηλεκτρονίων, η απώλεια της ενέργειας του ηλεκτρονίου προσλαμβάνεται από ένα άτομο το οποίο έτσι βρίσκεται σε μια νέα ενεργειακή κατάσταση. Σε κάθε μια από τις διακριτές απώλειες της ενέργειας των ηλεκτρονίων πρέπει να αντιστοιχεί μια διαφορετι-

* Αυτό ισχύει για κρούσεις με μεμονωμένα άτομα. Μη ελαστικές κρούσεις συμβαίνουν σε χαμηλότερες ενέργειες σε διατομικά ή πολυατομικά μόρια λόγω των επιπλέον σταθμών ταλάντωσης και περιστροφής των μορίων.



Σχήμα 3.2 Σχηματικό διάγραμμα των εξωτερικών ενεργειακών σταθμών ενός ατόμου υδραργύρου.

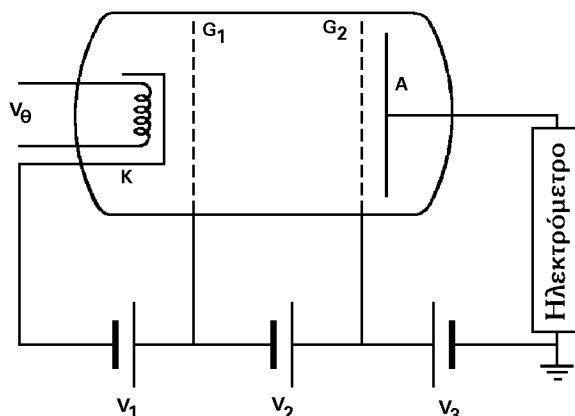
κή ενεργειακή κατάσταση των ατόμων. Όλα τα άτομα του ίδιου στοιχείου έχουν ένα χαρακτηριστικό διακριτό σύνολο ενεργειακών καταστάσεων στις οποίες μπορούν να υπάρξουν μετά από κρούσεις. Οι καταστάσεις αυτές ονομάζονται 'στατικές καταστάσεις' επειδή ένα άτομο μπορεί να μεταβεί από την μια κατάσταση σε μια άλλη μέσω ενός μηχανισμού ο οποίος προβλέπει την μεταφορά του απαιτούμενου ποσού της ενέργειας. Η στατική κατάσταση με την χαμηλότερη ενέργεια, η οποία είναι η συνήθης σταθερή κατάσταση ενός ελεύθερου ατόμου, ονομάζεται *βασική κατάσταση*, ενώ όλες οι άλλες *διεγερμένες καταστάσεις*. Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2 οι διαφορές μεταξύ των διαδοχικών διεγερμένων καταστάσεων ή αλλιώς των διαφορετικών κρίσιμων δυναμικών μειώνονται γρήγορα μέχρι ενός σημείου τέτοιου ώστε τα κρίσιμα δυναμικά να μην μπορούν να διακριθούν.

II. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

Η πειραματική διάταξη, που χρησιμοποιείται στην άσκηση αυτή, αποτελείται από μια τέτροδο λυχνία (λυχνία με τέσσερα ηλεκτρόδια, την κάθοδο K, τα δύο πλέγματα G_1 και G_2 και την άνοδο A), η οποία περιέχει κάποιο μονοατομικό αέριο σε ικανοποιητική πίεση, με αποτέλεσμα τα ηλεκτρόνια να υφίστανται πολλές σκεδάσεις κατά την διαδρομή τους από την κάθοδο στην άνοδο. Επίσης, περιλαμβάνει τροφοδοτικά για την θέρμανση της καθόδου, την επιτάχυνση των ηλεκτρονίων και την ενεργειακή τους διευκρίνιση, βολτόμετρα για την μέτρηση των τάσεων και ένα ηλεκτρομέτρο για την μέτρηση του ανοδικού ρεύματος. Η συνδεσμολογία της διάταξης παρουσιάζεται στο σχήμα 3.3.

Όταν το αέριο της λυχνίας είναι οι ατμοί κάποιου στοιχείου, π.χ. υδράργυρος, για να επιτευχθεί η επιθυμητή συγκέντρωση των ατμών του στοιχείου, η λυχνία πρέπει να βρίσκεται σε κάποια υψηλή θερμοκρασία, στην περιοχή $150 - 200$ °C για τον υδράργυρο. Για τον λόγο αυτόν, η λυχνία βρίσκεται σε έναν χώρο τον οποίο μπορούμε να θερμάνουμε. Είναι προφανές ότι, όταν το αέριο της λυχνίας είναι κάποιο ευγενές αέριο δεν απαιτείται θέρμανση της λυχνίας.

Στο πρώτο μέρος της άσκησης αυτής θα χρησιμοποιήσουμε σαν σκεδαστή άτομα (ατιμούς) υδραργύρου. Η πιο χαρακτηριστική γραμμή στο φάσμα του υδραργύ-



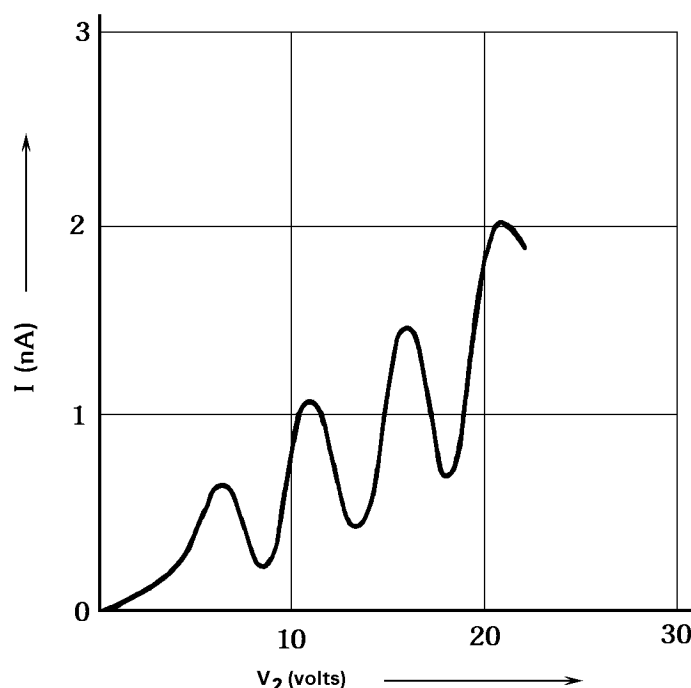
Σχήμα 3.3 Σχηματικό διάγραμμα της συσκευής για την μελέτη του πειράματος Franck – Hertz στο εργαστήριο. Α άνοδος, Κ κάθοδος, G_1 και G_2 πλέγματα.

ρου, με μήκος κύματος 253,5 nm, αντιστοιχεί σε διαφορά ενέργειας 4,89 eV και προκύπτει από την μετάπτωση της πρώτης διεγερμένης στάθμης του υδραργύρου στην βασική, σχήμα 3.2. Προφανώς υπάρχουν και άλλες πολλές γραμμές στο φάσμα του υδραργύρου, οι οποίες προκύπτουν όταν το άτομο αποδιεγείρεται από υψηλότερες διεγερμένες στάθμες. Προϋπόθεση για να δει κανείς τις γραμμές αυτές είναι προφανώς το άτομο να έχει διεγερθεί στις καταστάσεις αυτές. Με την συγκεκριμένη διάταξη που χρησιμοποιούμε, μπορούμε να μελετήσουμε μόνο την πρώτη διεγερμένη στάθμη του ατόμου του υδραργύρου.

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ της καθόδου Κ και του πρώτου πλέγματος G_1 , V_1 , χρησιμεύει για την αραίωση του νέφους των ηλεκτρονίων γύρω από την κάθοδο για να μην παρατηρείται αυτοτελής εκκένωση. Τα ηλεκτρόνια επιταχύνονται στον χώρο μεταξύ των δύο πλεγμάτων με την διαφορά δυναμικού V_2 , όπου και συγκρούονται με τα άτομα του αερίου. Στην συνέχεια, περνώντας από το πλέγμα G_2 , επιβραδύνονται λόγω της ανάστροφης τάσης V_3 μεταξύ του δεύτερου πλέγματος G_2 και της ανόδου Α. Τα ηλεκτρόνια με ενέργεια μικρότερη από eV_3 δεν καταφέρνουν να φτάσουν στην άνοδο, ενώ αυτά με ενέργεια μεγαλύτερη από eV_3 συλλέγονται στην άνοδο και συνεισφέρουν στο ανοδικό ρεύμα I που μετριέται με το ηλεκτρόμετρο.

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η μελέτη του ανοδικού ρεύματος σαν συνάρτηση του επιταχύνοντος δυναμικού V_2 . Στο σχήμα 3.4 παρουσιάζεται ένα τμήμα αυτής της καμπύλης.

Η ερμηνεία της καμπύλης έχει ως εξής: Τα ηλεκτρόνια κερδίζουν ενέργεια μεταξύ των συγκρούσεων με τα άτομα του αερίου, μέρος της οποίας χάνουν κατά την σύγκρουσή τους μ' αυτά. Όταν η τάση επιτάχυνσης είναι χαμηλή, η ενέργεια που μπορούν να κερδίσουν τα ηλεκτρόνια είναι μικρή και οι συγκρούσεις με τα άτομα του αερίου είναι ελαστικές. Τα ηλεκτρόνια κατά την σκέδαση δεν χάνουν (σημαντική) ενέργεια, απλώς αλλάζει η διεύθυνση της κίνησής τους. Όσα από αυτά καταφέρνουν να φτάσουν στο δεύτερο πλέγμα με ενέργεια μεγαλύτερη από eV_3 συλλέγονται από την άνοδο και συνεισφέρουν στο ανοδικό ρεύμα. Με την αύξηση της τάσης επιτάχυνσης το ανοδικό ρεύμα αυξάνεται γιατί όλο και περισσότερα ηλεκτρόνια καταφέρνουν να φτάσουν στο πλέγμα με ενέργεια μεγαλύτερη από eV_3 .



Σχήμα 3.4 Τμήμα της καμπύλης ανοδικό ρεύμα – τάση επιτάχυνσης που λαμβάνεται με την διάταξη του σχήματος 3.3.

Όταν η ενέργεια που κερδίζουν τα ηλεκτρόνια φτάσει την ενέργεια της πρώτης διεγερμένης στάθμης του αερίου, κάποια από τα ηλεκτρόνια υφίστανται μη ελαστικές κρούσεις με τα άτομα του αερίου, στα οποία προσφέρουν την απαραίτητη ενέργεια για να διεγερθούν. Το αποτέλεσμα της μη ελαστικής σκέδασης είναι τα ηλεκτρόνια να χάσουν ενέργεια ίση με την ενέργεια διέγερσης των ατόμων του αερίου, με αποτέλεσμα, όταν φτάσουν στο δεύτερο πλέγμα να έχουν ενέργεια μικρότερη από eV_2 . Έτσι, ο αριθμός των ηλεκτρονίων που φτάνουν στην άνοδο μειώνεται, με αποτέλεσμα την μείωση του ανοδικού ρεύματος. Αν αυξήσουμε την τάση επιτάχυνσης, τα ηλεκτρόνια που υπέστησαν μη ελαστική σκέδαση κερδίζουν κάποια ενέργεια και καταφέρνουν να φτάσουν στην άνοδο, με αποτέλεσμα την εκ νέου αύξηση του ρεύματος. Καθώς αυξάνουμε και άλλο την τάση επιτάχυνσης, τα ηλεκτρόνια αποκτούν πάλι ικανή ενέργεια ώστε να σκεδαστούν μη ελαστικά με τα άτομα του αερίου κ.ο.κ..

Μερικά φαινόμενα που παρατηρούνται, χωρίς όμως να επηρεάζουν τα βασικά χαρακτηριστικά του πειράματος, είναι:

1. Οι μεταβάσεις από τα μέγιστα στα ελάχιστα της καμπύλης δεν είναι απότομες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα ηλεκτρόνια μέσα στην λυχνία δεν έχουν όλα την ίδια ενέργεια (γιατί;), με αποτέλεσμα κάποια από αυτά να σκεδάζονται μη ελαστικά σε μικρότερες τιμές της τάσης V_2 και άλλα σε μεγαλύτερες τιμές της V_2 .
2. Τα μέγιστα και τα ελάχιστα του ρεύματος φαίνεται να επικάθονται σε μια συνεχώς αύξουσα καμπύλη. Αυτό οφείλεται στην γενική αύξηση του αριθμού των ηλεκτρονίων που συλλέγονται στην άνοδο καθώς αυξάνεται η διαφορά δυναμικού της επιτάχυνσης.

III. ΟΡΓΑΝΑ

1. Λυχνία Franck – Hertz με Hg.
2. Λυχνία Franck – Hertz με Ne.
3. Κλίβανος θέρμανσης.
4. Τροφοδοτικό του κλιβάνου θέρμανσης.
5. Τροφοδοτικό για την θέρμανση της καθόδου.
6. Τροφοδοτικό 0 – 5 volts.
7. Τροφοδοτικό 0 – 70 volts.
8. Τροφοδοτικό 0 – 11 volts.
9. Βολτόμετρο.
10. Ηλεκτρόμετρο.
11. Καλώδια σύνδεσης.

Η λυχνία του Hg (1) βρίσκεται μέσα στον κλίβανο θέρμανσης (3). Τα 4, 5, 6, 7, 8, 9 και 10 βρίσκονται σε κοινό περίβλημα.

IV. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

A. Μετρήσεις με την λυχνία Hg

1. Αναγνωρίστε τις συσκευές.
2. Πραγματοποιείτε το κύκλωμα του σχήματος 3.3 χρησιμοποιώντας την λυχνία Hg.
3. Ανάψτε την συσκευή. Με την βοήθεια του υπεύθυνου της άσκησης ρυθμίστε την επιθυμητή θερμοκρασία του κλιβάνου. Περιμένετε μέχρις ότου η θερμοκρασία του κλιβάνου φτάσει την επιθυμητή τιμή.
4. Ρυθμίστε την τάση V_3 σε μια τιμή κοντά στα 1,5 V.
5. Με την βοήθεια του παλμογράφου ρυθμίστε την τάση V_1 ώστε να έχετε το μεγαλύτερο δυνατό ρεύμα χωρίς να παρατηρούνται φαινόμενα κόρου.
6. Πάρτε ζεύγη τιμών: τάση επιτάχυνσης – ανοδικό ρεύμα, μεταβάλλοντας την τάση επιτάχυνσης κατά μικρά βήματα.
7. Σχεδιάστε την καμπύλη ανοδικό ρεύμα – τάση επιτάχυνσης. Ερμηνεύστε την καμπύλη που προκύπτει.
8. Επαναλάβετε τα βήματα 4 – 7 για κάποια άλλη θερμοκρασία του κλιβάνου. Τι παρατηρείτε στις δύο καμπύλες; Ερμηνεία.
9. Βρείτε την απόσταση μεταξύ όλων των διαδοχικών ελαχίστων. Πόσο είναι το πειραματικό σφάλμα της κάθε τιμής; Θεωρώντας όλες τις τιμές διαφοράς (και από τις δύο καμπύλες), βρείτε τον μέσο όρο τους και το αντίστοιχο σφάλμα.
10. Ποιά τιμή προκύπτει για την ενέργεια διέγερσης των ατόμων του υδραργύρου από το πείραμά σας;
11. Υπολογίστε το μήκος κύματος της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας κατά την αποδιέγερση των ατόμων από την πειραματική τιμή της ενέργειας διέγερσης.
12. Σχόλια, συμπεράσματα.

B. Μετρήσεις με την λυχνία Ne

1. Αναγνωρίστε τις συσκευές.

50 Πείραμα Franck – Hertz

2. Πραγματοποιείτε το κύκλωμα του σχήματος 3.3 χρησιμοποιώντας την λυχνία Ne.
3. Ανάψτε την συσκευή. Περιμένετε λίγα λεπτά μέχρι να θερμανθεί το νήμα της λυχνίας
4. Ρυθμίστε την τάση V_3 σε μια τιμή κοντά στα 10 V.
5. Με την βοήθεια του παλμογράφου ρυθμίστε την τάση V_1 ώστε να έχετε το μεγαλύτερο δυνατό ρεύμα χωρίς να παρατηρούνται φαινόμενα κόρου.
6. Πάρτε ζεύγη τιμών: τάση επιτάχυνσης – ανοδικό ρεύμα, μεταβάλλοντας την τάση επιτάχυνσης κατά μικρά βήματα.
7. Σχεδιάστε την καμπύλη ανοδικό ρεύμα – τάση επιτάχυνσης. Ερμηνεύστε την καμπύλη που προκύπτει.
8. Βρείτε την απόσταση μεταξύ όλων των διαδοχικών μεγίστων. Λόγω της υψηλής τιμής του V_3 δεν παρατηρούνται τα ελάχιστα της καμπύλης. Ποιό είναι το πειραματικό σφάλμα της κάθε τιμής. Βρείτε τον μέσο όρο τους και το αντίστοιχο σφάλμα του.
9. Ποιά τιμή προκύπτει για την ενέργεια διέγερσης των ατόμων του νέον από το πείραμά σας;
10. Υπολογίστε το μήκος κύματος της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας κατά την αποδιέγερση των ατόμων από την πειραματική τιμή της ενέργειας διέγερσης.
11. Σχόλια, συμπεράσματα.

ΑΣΚΗΣΗ 4

ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ e/m ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΟΥ (με την μέθοδο Bainbridge)

Σκοπός της άσκησης είναι η μέτρηση του λόγου e/m των ηλεκτρονίων με την μέθοδο Bainbridge. Ο λόγος αυτός είναι σημαντικός γιατί, γνωρίζοντας το φορτίο του ηλεκτρονίου, μπορούμε να υπολογίσουμε την μάζα του.

I. ΘΕΩΡΙΑ

Τα πάντα στον κόσμο γύρω μας είναι δομημένα από πρωτόνια, νετρόνια και ηλεκτρόνια. Τα πρωτόνια και τα νετρόνια είναι σύνθετα σωματίδια, ενώ το ηλεκτρόνιο είναι το μόνο στοιχειώδες σωματίδιο που υπάρχει στην φύση τόσο σαν ελεύθερο, όσο και σαν δομικό συστατικό των ατόμων. Συνεπώς, η ακριβής γνώση των χαρακτηριστικών του παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον (ακόμη και ερευνητικά). Ένα από τα χαρακτηριστικά του είναι η μάζα του, $m_e = 9,10938 \times 10^{-31} \text{ kg} = 0,510999 \text{ MeV}/c^2$. Μια τόσο μικρή μάζα είναι αδύνατο να μετρηθεί άμεσα. Έτσι, είμαστε αναγκασμένοι να καταφύγουμε σε έμμεσες μετρήσεις. Ένας τρόπος για να υπολογιστεί η μάζα του ηλεκτρονίου είναι από την τιμή του λόγου του φορτίου του προς την μάζα του, ή του λόγου e/m , αν είναι γνωστό το φορτίο του ηλεκτρονίου. Η ποσότητα αυτή μπορεί να προκύψει με μεγάλη ακρίβεια μετρώντας μακροσκοπικά μεγέθη. Οι μέθοδοι για την μέτρηση του λόγου e/m του ηλεκτρονίου βασίζονται στην επίδραση ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων σε μια δέσμη ηλεκτρονίων (μέθοδοι Thomson, Bainbridge), ή στην διαφορά των φασμάτων των ισοτόπων του υδρογόνου (φασματομετρικές μέθοδοι), ή στην μέτρηση του δείκτη διάθλασης των ακτίνων Χ. Στην άσκηση αυτή θα ασχοληθούμε με την μέτρηση του λόγου e/m με την μέθοδο Bainbridge.

Η μέθοδος βασίζεται στην μελέτη της κίνησης μιας δέσμης ηλεκτρονίων σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετο στην διεύθυνση της ταχύτητας της δέσμης. Η μέθοδος είναι γενική και χρησιμοποιείται στους φασματογράφους μάζας (στην ουσία είναι

φασματογράφοι q/M). Η αρχή της μεθόδου χρησιμοποιείται επίσης και στους κυκλικούς επιταχυντές.

Έστω λοιπόν μια δέσμη ηλεκτρονίων ενέργειας E και ταχύτητας \vec{v} που εισέρχεται σε έναν χώρο όπου υπάρχει μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής \vec{B} . Η δύναμη Lorentz που εξασκείται πάνω στα ηλεκτρόνια της δέσμης είναι:

$$\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B} \quad (4.1)$$

Όταν η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας και της μαγνητικής επαγωγής είναι ακριβώς 90° , τότε η τροχιά είναι κυκλική. Στην γενική περίπτωση όπου τα δύο διανύσματα δεν είναι ακριβώς κάθετα μεταξύ τους, μπορούμε να αναλύσουμε το διάνυσμα της ταχύτητας σε δύο συνιστώσες, μια παράλληλη και μια κάθετη στο διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής. Η παράλληλη συνιστώσα μένει ανεπηρέαστη από το μαγνητικό πεδίο, ενώ η κάθετη συνιστώσα έχει σαν συνέπεια να ασκείται στο ηλεκτρόνιο μια δύναμη κάθετη τόσο σ' αυτήν όσο και στην μαγνητική επαγωγή. Σαν επακόλουθο, η δέσμη των ηλεκτρονίων κινείται κυκλικά λόγω της κάθετης συνιστώσας ενώ μετατοπίζεται λόγω της παράλληλης συνιστώσας, διαγράφει λοιπόν μια ελικοειδή καμπύλη. Αν η απόκλιση από την καθετότητα είναι μικρή, άρα η παράλληλη προς το μαγνητικό πεδίο συνιστώσα τείνει στο μηδέν, τότε η τροχιά προσεγγίζει την κυκλική και δεν έχει καθόλου εικόνα σπείρας. Η μαγνητική επαγωγή και η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων επηρεάζουν την ακτίνα της τροχιάς, κάτι που μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί στην άσκηση αυτή.

Η δύναμη Lorentz παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Έτσι, στην περίπτωση της κυκλικής κίνησης:

$$\frac{mv^2}{r} = evB \quad (4.2)$$

Αυτή είναι η σχέση που συνδέει τα βασικά μεγέθη της κίνησης ενός ηλεκτρονίου μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο, δηλαδή:

- την ταχύτητα v
- το φορτίο e
- την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς r και
- την μαγνητική επαγωγή B .

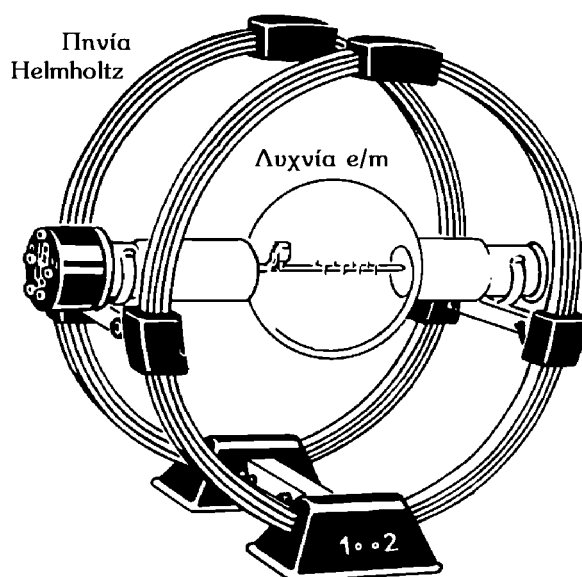
Από την σχέση (4.2) προκύπτει:

$$Br = \frac{mv}{e} \quad \text{ή} \quad Br = \frac{p}{e} \quad (4.3)$$

όπου p είναι η ορμή της δέσμης των ηλεκτρονίων. Η ποσότητα Br λέγεται *μαγνητική ακαμψία*. Όπως προκύπτει από την σχέση (4.3) **η μαγνητική ακαμψία μιας δέσμης ηλεκτρονίων (και γενικά μιας δέσμης φορτισμένων σωματιδίων) είναι ανάλογη της ορμής των σωματιδίων της δέσμης.**

Στην σχέση (4.3) η μάζα m ταυτίζεται με την μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου, εφόσον η ταχύτητά του είναι μη σχετικιστική. Για παράδειγμα, η ταχύτητα των ηλεκτρονίων με κινητική ενέργεια 250 eV είναι περίπου το 0,5% της ταχύτητας του φωτός και η αντίστοιχη αύξηση της μάζας λόγω της κίνησης είναι αμελητέα. Έτσι, μπορούμε να αγνοήσουμε τις διορθώσεις λόγω σχετικότητας και να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους της κλασικής μηχανικής. Από τις σχέσεις (4.2) και (4.3) προκύπτει:

$$\frac{e}{m} = \frac{v}{rB} \quad (4.4)$$



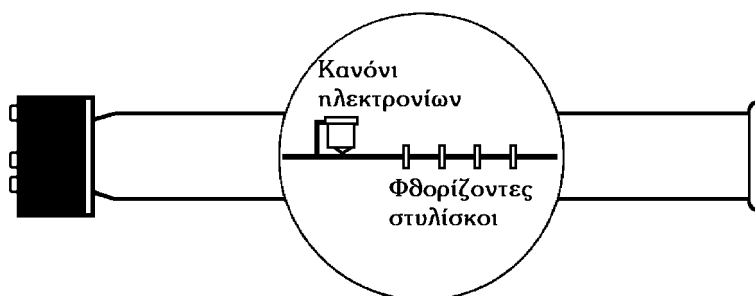
Σχήμα 4.1 Η πειραματική διάταξη για την μέτρηση του λόγου e/m του ηλεκτρονίου.

Συνεπώς, για την ακριβή μέτρηση του λόγου e/m [C/kg] του ηλεκτρονίου, μέσω της μαγνητικής ακαμψίας, χρειάζεται αντίστοιχα η ακριβής μέτρηση της ταχύτητάς του v [m/s] και της ακτίνας r [m] της κυκλικής τροχιάς του μέσα στο μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής B [T].

II. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από μια κατάλληλη λυχνία που βρίσκεται στο ομογενές μαγνητικό πεδίο το οποίο δημιουργείται από δύο πηνία Helmholtz, σχήμα 4.1, από μερικά τροφοδοτικά χαμηλής και υψηλής τάσης για την παραγωγή, την εστίαση και την επιτάχυνση των ηλεκτρονίων και την τροφοδοσία των πηνίων Helmholtz και από όργανα μέτρησης της διαφοράς δυναμικού ανόδου – καθόδου (βολτόμετρο) και του ρεύματος που διαρρέει τα πηνία (αμπερόμετρο).

Η λυχνία περιέχει ένα κανόνι ηλεκτρονίων (θερμαινόμενο νήμα και ηλεκτρόδιο εστίασης για να σχηματιστεί μια λεπτή και έντονη δέσμη ηλεκτρονίων και την άνοδο). Η άνοδος έχει μια οπή στο κέντρο της από την οποία εξέρχεται η δέσμη των ηλεκτρονίων. Το κανόνι των ηλεκτρονίων είναι θωρακισμένο ώστε η κίνηση των ηλεκτρονίων μέσα σ' αυτό να μην επηρεάζεται από το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Κάθετα στην διεύθυνση των εξερχόμενων ηλεκτρονίων υπάρχει μια σειρά από φθορίζοντες στυλίσκους, σχήμα 4.2. Οι αποστάσεις των στυλίσκων από την οπή της ανόδου παρουσιάζονται στον πίνακα 4.1.



Σχήμα 4.2 Τομή της λυχνίας για την μέτρηση του λόγου e/m .

54 Μέτρηση του λόγου e/m των ηλεκτρονίων

Η λυχνία θα μπορούσε να είναι αερόκενη. Όμως, για καθαρά εποπτικούς λόγους, περιέχει υδρογόνο σε χαμηλή πίεση. Ο λόγος της παρουσίας του υδρογόνου θα δοθεί παρακάτω.

Η ταχύτητα v με την οποία εξέρχεται η δέσμη των ηλεκτρονίων από την άνοδο δίνεται από την σχέση:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV \quad \text{ή} \quad v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \quad (4.5)$$

όπου V είναι η διαφορά δυναμικού ανόδου – καθόδου.

Πίνακας 4.1
Αποστάσεις των στυλίσκων από την οπή της ανόδου.

| Στυλίσκος | Απόσταση (m) |
|-----------|--------------|
| 1 | 0,04 |
| 2 | 0,06 |
| 3 | 0,08 |
| 4 | 0,10 |

Η διάταξη Helmholtz είναι δύο ίδια πηνία, παράλληλα μεταξύ τους, των οποίων η απόσταση είναι ίση με την ακτίνα τους (πηνία Helmholtz). Το μαγνητικό πεδίο B [T] που δημιουργούν τα πηνία Helmholtz στον εσωτερικό χώρο όπου κινούνται τα ηλεκτρόνια είναι κυκλικά ομογενές. Η μαγνητική επαγωγή στο μέσο του άξονα των πηνίων δίνεται από την σχέση:

$$B[T] = \frac{8\mu_0}{\sqrt{125}} \frac{N}{a} I \quad (4.6)$$

όπου $\mu_0 = 1,257 \times 10^{-6} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ είναι η μαγνητική επιδεκτικότητα του κενού, I [A] η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τα πηνία, a [m] η ακτίνα των πηνίων και N ο αριθμός των σπειρών κάθε πηνίου. Για την συγκεκριμένη διάταξη $a = 0,2 \text{ m}$ και $N = 154$ σπείρες. Έτσι, η μαγνητική επαγωγή του πεδίου αναμένεται να είναι περίπου 10^{-3} T όταν από τα πηνία Helmholtz διέρχεται ηλεκτρικό ρεύμα 1 A.

Αν η διεύθυνση της μαγνητικής επαγωγής είναι κάθετη στην διεύθυνση της ταχύτητας των ηλεκτρονίων, τότε με αντικατάσταση των σχέσεων (4.5) και (4.6) στην (4.4) προκύπτει:

$$\frac{e}{m} = 2,47 \times 10^{12} \frac{a^2}{N^2} \frac{V}{I^2 r^2} \text{ [C/kg]} \quad (4.7)$$

Η μέτρηση του λόγου e/m έχει ως ακολούθως: Με σβηστά τα φώτα του χώρου εργασίας ρυθμίζονται η τάση επιτάχυνσης και η ένταση του ρεύματος των πηνίων ώστε η δέσμη των ηλεκτρονίων να προσπίπτει σε κάποιον στυλίσκο. Από τις τιμές της τάσης επιτάχυνσης, της έντασης του ρεύματος και από το μισό της απόστασης του στυλίσκου από την οπή της ανόδου (γιατί;) και με βάση την σχέση (4.7) υπολογίζεται η τιμή του λόγου e/m .

A. Ο ρόλος του αερίου της λυχνίας

Για να έχει ο φοιτητής μια εποπτική εικόνα για το τι γίνεται μέσα στην λυχνία, αλλά και για να μπορούν να γίνουν κάποιες ρυθμίσεις πριν από την έναρξη των μετρήσεων, η δέσμη των ηλεκτρονίων πρέπει να είναι ορατή. Είναι προφανές, λόγω του μεγέθους των ηλεκτρονίων, ότι είναι αδύνατο, ακόμη και με το καλύτερο μικροσκόπιο, να δούμε άμεσα την δέσμη των ηλεκτρονίων. Όμως, η δέσμη των ηλεκτρονίων μπορεί να γίνει ορατή έμμεσα.

Καθώς τα ηλεκτρόνια (και κάθε φορτισμένο σωματίδιο) διέρχονται μέσα από την ύλη αλληλεπιδρούν με τα ηλεκτρόνια των ατόμων ή/και των μορίων της ύλης με δυνάμεις Coulomb και τους δίνουν ένα μέρος της ενέργειάς τους. Ανάλογα με το ποσό της ενέργειας που δίνεται στα ηλεκτρόνια των ατόμων ή/και των μορίων της ύλης, τα άτομα ή/και τα μόρια διεγείρονται ή ιονίζονται. Τα μεν διεγερμένα άτομα ή/και μόρια αποδιεγείρονται με εκπομπή φωτονίων, τα δε ιονισμένα άτομα ή/και μόρια συλλαμβάνουν ηλεκτρόνια χαμηλής ενέργειας, σε τροχιές με μεγάλους κβαντικούς αριθμούς, γίνονται ουδέτερα και συνεχίζουν με μεταπτώσεις μέχρι να φτάσουν στην βασική τους κατάσταση, εκπέμποντας φωτόνια. Αν η ενέργεια των ηλεκτρονίων της δέσμης είναι χαμηλή έχουμε μόνο διεγέρσεις, αν είναι όμως υψηλότερη τότε μπορεί να είναι επαρκής και για ιονισμούς. Στην άσκηση αυτή, που χρησιμοποιούμε τάσεις επιτάχυνσης περί τα 200 V, τα ηλεκτρόνια αποκτούν ενέργειες περί τα 200 eV, οι οποίες είναι επαρκείς και για ιονισμούς (η ενέργεια ιονισμού του υδρογόνου είναι 13,6 eV).

Αν, λοιπόν, εισάγουμε στην λυχνία κάποιο αέριο, σε χαμηλή πίεση, τότε θα συμβούν αυτά που περιγράφηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, καθώς η δέσμη των ηλεκτρονίων διέρχεται μέσα από το αέριο. Αυτό γιατί οι ενέργειες διέγερσης και ιονισμού των αερίων είναι της τάξης των 10 eV και οι ενέργειες των ηλεκτρονίων της δέσμης της τάξης των 100 eV (ικανές να διεγείρουν και κυρίως να ιονίσουν τα μόρια του αερίου). Όμως, τα μόρια των αερίων δεν είναι ακίνητα. Κινούνται άτακτα σε τυχαίες διευθύνσεις (κίνηση Brown). Αν δεν επιλέξουμε το κατάλληλο αέριο, τότε τα διεγερμένα ή/και ιονισμένα μόρια θα προλάβουν να μετακινηθούν από την θέση διέγερσης/ιονισμού, με αποτέλεσμα η τροχιά των ηλεκτρονίων να είναι τουλάχιστον ασαφής. Αν όμως ο μηχανισμός της αποδιέγερσης διαρκέσει ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα, τότε τα διεγερμένα/ιονισμένα μόρια δεν θα προλάβουν να απομακρυνθούν από τον χώρο διέλευσης της δέσμης των ηλεκτρονίων. Έτσι, το κριτήριό μας στην επιλογή του αερίου είναι ο μικρός χρόνος αποδιέγερσης των διεγερμένων ατόμων ή/και μορίων. Ο τυπικός χρόνος αποδιέγερσης των ατόμων ή/και των μορίων, όπως είναι γνωστό από την Ατομική Φυσική, είναι στην περιοχή $10^{-9} - 10^{-8}$ s. Επιλέγοντας λοιπόν ένα τέτοιο αέριο, ή με άλλα λόγια ένα αέριο που να μην έχει μετασταθείς στάθμες (των οποίων ο χρόνος αποδιέγερσης είναι μεγαλύτερος από 10^{-4} s), μπορούμε να δούμε καθαρά την δέσμη των ηλεκτρονίων. Το υδρογόνο είναι ένα τέτοιο αέριο.

Πρέπει να προσθέσουμε ότι η παρουσία των ιόντων στην περιοχή διέλευσης της δέσμης, λόγω του θετικού τους φορτίου, βοηθά ώστε η δέσμη των ηλεκτρονίων να παραμένει λεπτή.

B. Επίδραση εξωτερικών παραγόντων

Οποιοδήποτε μαγνητικό πεδίο που υπάρχει στον χώρο στον οποίο βρίσκεται η συσκευή, εκτός από το μαγνητικό πεδίο των πηνίων, θα έχει σαν συνέπεια την διατα-

ραχή της τροχιάς των ηλεκτρονίων. Ανάλογα με το μέτρο και την διεύθυνση του πεδίου αυτού, η διαταραχή μπορεί να εισάγεται στην ακτίνα της τροχιάς αλλά και στην μετατροπή της κυκλικής τροχιάς σε σπειροειδή. Η κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς συνιστώσα του πεδίου εισάγει διαταραχή στην ακτίνα της τροχιάς, ενώ η συνιστώσα που βρίσκεται στο επίπεδο της κυκλικής τροχιάς, όταν δεν είναι παράλληλη με τα διάνυσμα της ταχύτητας, προκαλεί μετατόπιση της τροχιάς και μετατρέπει την κυκλική τροχιά σε σπειροειδή. Έτσι, η τροχιά των ηλεκτρονίων δεν θα είναι συνέπεια μόνο του μαγνητικού πεδίου των πηνίων αλλά και κάποιου εξωτερικού πεδίου, εισάγοντας έτσι συστηματικό σφάλμα στην μέτρηση.

Όπως είναι γνωστό, το γήινο μαγνητικό πεδίο έχει ένταση περί το $0,5 \times 10^{-4}$ T, διεύθυνση βορρά – νότου και σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο μια γωνία, *γωνία έγκλισης*, που εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος. Επίσης, είναι γνωστό ότι όταν το μαγνητικό πεδίο είναι παράλληλο προς την ταχύτητα ενός φορτισμένου σωματιδίου, τότε η επίδρασή του στην κίνηση του σωματιδίου είναι μηδενική.

Επειδή δεν μπορούμε να μηδενίσουμε την ένταση του γήινου μαγνητικού πεδίου, θα πρέπει να προσανατολίσουμε την συσκευή μας ώστε να μηδενίζεται η επίδρασή του στην τροχιά των ηλεκτρονίων. Έτσι, θα πρέπει να προσανατολίσουμε την συσκευή μας ώστε η ταχύτητα των ηλεκτρονίων, χωρίς το μαγνητικό πεδίο των πηνίων, να είναι παράλληλη προς την διεύθυνση του γήινου μαγνητικού πεδίου. Για τον λόγο αυτόν χρησιμοποιούμε την πυξίδα έγκλισης.

Η πυξίδα έγκλισης είναι μια μαγνητική βελόνα η οποία μας δείχνει την ακριβή διεύθυνση του γήινου μαγνητικού πεδίου. Διαφέρει από μια κοινή πυξίδα στο γεγονός ότι η μαγνητική βελόνα της έχει την δυνατότητα κίνησης και στο κατακόρυφο επίπεδο, στο οποίο μετρά ακριβώς την γωνία έγκλισης..

Η διαδικασία προσανατολισμού της συσκευής έχει ως ακολούθως: Πρώτα προσανατολίζουμε την συσκευή έτσι ώστε το επίπεδο της τροχιάς των ηλεκτρονίων, παρουσία του μαγνητικού πεδίου των πηνίων, να είναι κατά την διεύθυνση βορρά – νότου. Αυτό σημαίνει ότι το γήινο μαγνητικό πεδίο δεν θα προκαλέσει οποιαδήποτε αλλαγή στην ακτίνα της τροχιάς των ηλεκτρονίων. Κατά το μέτρο βέβαια που το γήινο μαγνητικό πεδίο δεν είναι παράλληλο με την τροχιά των ηλεκτρονίων, θα προκαλέσει μια μικρή μετατόπιση του επιπέδου της τροχιάς, χωρίς όμως αλλαγή της ακτίνας (που είναι το μέγεθος που μας ενδιαφέρει να μετρήσουμε με το μικρότερο δυνατό σφάλμα). Για να μειώσουμε κατά το δυνατό και την μετατόπιση του επιπέδου της τροχιάς, με σβηστό το πεδίο, στρέφουμε τη συσκευή, σε κάθετο προς το επίπεδο της τροχιάς των ηλεκτρονίων άξονα, ώστε η δέσμη των ηλεκτρονίων να γίνει παράλληλη προς την βελόνα της πυξίδας έγκλισης. Στην συνέχεια βέβαια, η αλλαγή της διεύθυνσης που θα προκαλέσει το μαγνητικό πεδίο των πηνίων, θα εκτρέψει την δέσμη από την παραλληλία με το γήινο μαγνητικό πεδίο, οπότε θα έχουμε την μικρή μετατόπιση του επιπέδου της τροχιάς, γεγονός όμως που δεν έχει συνέπειες στην ακρίβεια της μέτρησης της ακτίνας της τροχιάς.

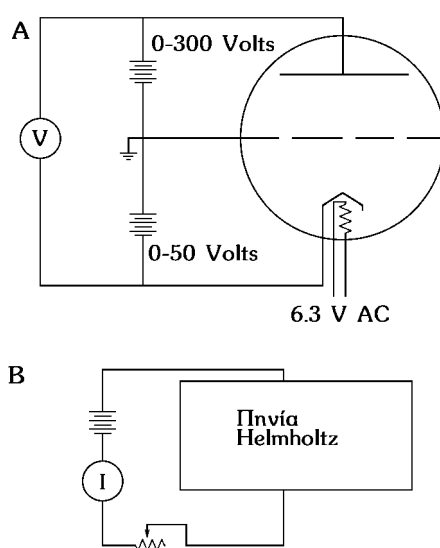
III. ΟΡΓΑΝΑ

1. Λυχνία για την μέτρηση του λόγου e/m με την μέθοδο Bainbridge.
2. Πηνία Helmholtz.
3. Τροφοδοτικό χαμηλής τάσης 6,3 V ac.
4. Τροφοδοτικό συνεχούς τάσης 0 – 50 V dc.
5. Τροφοδοτικό συνεχούς τάσης 0 – 250 V dc.
6. Τροφοδοτικό συνεχούς τάσης για την τροφοδοσία των πηνίων.
7. Βολτόμετρο.
8. Αμπερόμετρο.
9. Ροοστάτης.
10. Καλώδια σύνδεσης.

Τα 3, 4, 5, 6, 7, και 8 περικλείονται σε κοινό περίβλημα

IV. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

1. Αναγνωρίστε τις συσκευές.
2. Πραγματοποιείτε το κύκλωμα του σχήματος 4.3.
3. Μετά τον έλεγχο της συνδεσμολογίας θέσατε τις συσκευές υπό τάση, εκτός από το τροφοδοτικό των πηνίων. Πώς φαίνεται η δέσμη των ηλεκτρονίων;
4. Θέσατε υπό τάση και το τροφοδοτικό των πηνίων. Πως φαίνεται η δέσμη των ηλεκτρονίων; Γιατί;
5. Με την βοήθεια του υπεύθυνου της άσκησης ρυθμίστε την τάση εστίασης της δέσμης, ώστε η δέσμη να έχει τις μικρότερες δυνατές διαστάσεις. Η τάση αυτή θα πρέπει να παραμείνει σταθερή σε όλη την διάρκεια της άσκησης.
6. Ρυθμίστε την ανοδική τάση και την ένταση του ρεύματος των πηνίων ώστε η δέσμη των ηλεκτρονίων να προσπίπτει σε έναν στυλίσκο. Από τις τιμές της τάσης επιτάχυνσης, της έντασης του ρεύματος των πηνίων και της απόστασης στυλίσκου – ανόδου υπολογίστε τον λόγο e/m . Για λόγους καλύτερης κατανόησης της φυσικής του πειράματος, προτείνουμε να υπολογίζεται η τιμή της ταχύτητας της δέσμης των ηλεκτρονίων από την σχέση (4.5) και η τιμή της μα-



Σχήμα 4.3 Το ηλεκτρικό κύκλωμα της άσκησης. α) Το κύκλωμα της λυχνίας, β) Το κύκλωμα των πηνίων Helmholtz.

58 Μέτρηση του λόγου e/m των ηλεκτρονίων

γνητικής επαγωγής B από την σχέση (4.6) και στην συνέχεια η τιμή του e/m από την σχέση (4.4)

7. Ποιά σφάλματα υπεισέρχονται στην μέτρηση; Εκτιμήστε τα σφάλματα που υπεισέρχονται στην μέτρησή σας. Πόσο είναι το σφάλμα του e/m ;
8. Επαναλάβετε τα βήματα 6 και 7 τουλάχιστον άλλες 10 φορές με διαφορετικές ανοδικές τάσεις, εντάσεις του ρεύματος των πηνίων και διαφορετικούς στυλίσκους, σύμφωνα με τις οδηγίες του υπευθύνου της άσκησης.
9. Πόση είναι η τιμή του λόγου e/m που προέκυψε από τις μετρήσεις σας και πόσο είναι το σφάλμα του;
10. Συγκρίνετε το αποτέλεσμα σας με την αναμενόμενη τιμή από την βιβλιογραφία:

$$\frac{e}{m} = 1,758 \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

11. Σχόλια, συμπεράσματα.

ΑΣΚΗΣΗ 5

ΘΕΡΜΙΟΝΙΚΗ ΕΚΠΟΜΠΗ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ

Σκοπός της άσκησης είναι η μελέτη της θερμιονικής εκπομπής ηλεκτρονίων και η επιβεβαίωση του νόμου του Richardson.

I. ΘΕΩΡΙΑ

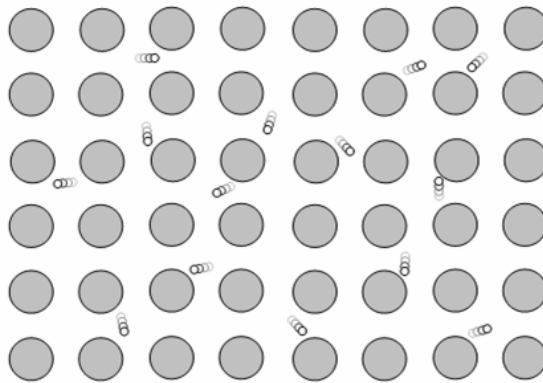
Θερμιονική εκπομπή είναι το φαινόμενο της εκπομπής ηλεκτρονίων από τα μέταλλα όταν αυτά θερμαίνονται σε υψηλές θερμοκρασίες.

Εκτός της προφανούς πρακτικής χρησιμότητας για τον σχεδιασμό εύχρηστων πηγών ηλεκτρονίων, το φαινόμενο της θερμιονικής εκπομπής παρουσιάζει ξεχωριστό ενδιαφέρον επειδή, επιπλέον, αντιστακτά τις βασικές ιδιότητες του ιδιόμορφου 'αερίου' των ελεύθερων ηλεκτρονίων των μετάλλων, του πιο κοινού κβαντικού συστήματος φερμιονίων.

A. Ελεύθερα ηλεκτρόνια των μετάλλων

Τα άτομα ενός ιδανικού στερεού διατάσσονται με έναν κανονικό τρόπο στον χώρο, καταλαμβάνοντας τις ισοδύναμες θέσεις μιας τρισδιάστατης περιοδικής δομής η οποία καλείται *κρυσταλλικό πλέγμα*.

Στα μεταλλικά στερεά οι θέσεις του κρυσταλλικού πλέγματος καταλαμβάνονται από θετικά ιόντα. Τα ιόντα αυτά προέρχονται από τα άτομα του μετάλλου τα οποία, κατά την συσσωμάτωσή τους για τον σχηματισμό του κρυσταλλικού πλέγματος, χάνουν τα ηλεκτρόνια σθένους επειδή αυτά είναι ασθενώς συνδεδεμένα με τα άτομα. Τα ηλεκτρόνια αυτά χαρακτηρίζονται σαν 'ελεύθερα' ηλεκτρόνια επειδή δεν ανήκουν πια σε συγκεκριμένα άτομα του μετάλλου, αλλά σε όλο το μεταλλικό στερεό από κοινού, σχήμα 5.1. Τα υπόλοιπα ηλεκτρόνια, που είναι ισχυρότερα συνδεδεμένα στο άτομό τους, παραμένουν δέσμια σ' αυτό, αποτελώντας μαζί με τον πυρήνα του το θετικό ιόν. Τα ηλεκτρόνια σθένους αποδεσμευμένα από τα άτομα, κινούνται σχεδόν ελεύθερα σε όλη την έκταση του μετάλλου, σκεδαζόμενα μόνο πάνω στα θετικά ιόντα και στις επιφάνειες του υλικού. Οι επιφάνειες του μετάλλου αποτελούν απωστικό



Σχήμα 5.1 Το μεταλλικό στερεό αποτελείται από το κρυσταλλικό πλέγμα των θετικών ιόντων και από τα ‘ελεύθερα’ ηλεκτρόνια του μετάλλου, δηλαδή από τα ηλεκτρόνια που ανήκουν σε όλο το στερεό (χωρίς όμως να είναι ελεύθερα να φύγουν από αυτό).

φράγμα δυναμικού για τα ηλεκτρόνια. Για να ξεφύγουν τα ηλεκτρόνια από το μέταλλο, θα πρέπει να προσλάβουν με κάποιον τρόπο ένα επιπλέον ποσό ενέργειας, *έργο εξόδου*. Επειδή τα ελεύθερα ηλεκτρόνια έχουν μεγάλη ευκινησία, είναι υπεύθυνα για την μεγάλη ηλεκτρική αγωγιμότητα των μετάλλων και γι’ αυτό ονομάζονται *ηλεκτρονια αγωγιμότητας*.

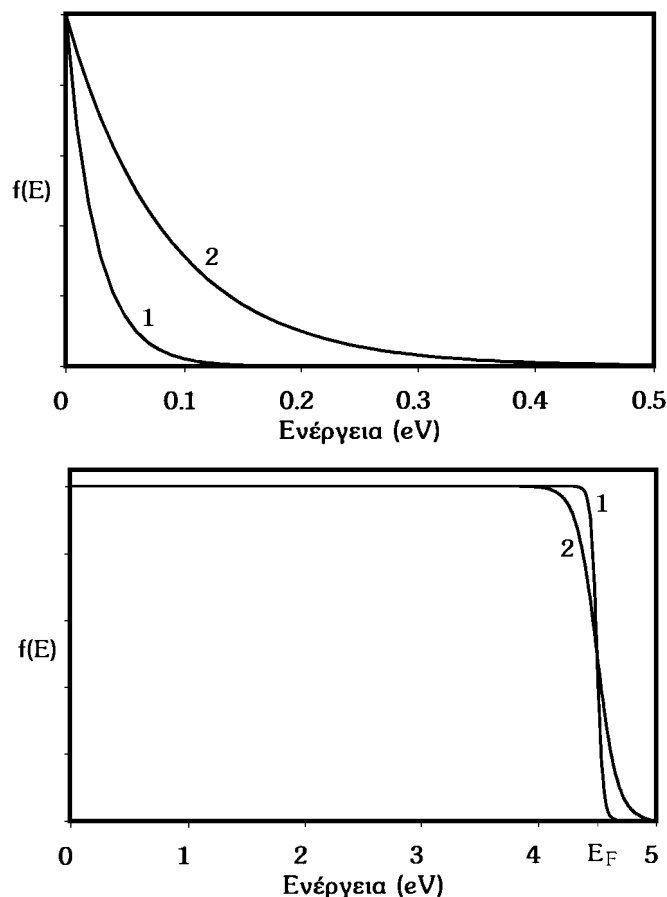
Σύμφωνα με την εικόνα που περιγράφηκε, θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας όμοια με τα κλασικά σωματίδια ενός αερίου το οποίο βρίσκεται περιορισμένο σε ένα δοχείο με όρια τις επιφάνειες του μετάλλου. Αυτό ήταν πράγματι και το πρώτο μοντέλο, που προτάθηκε από τον Paul Drude στις αρχές του 20ου αιώνα. Σύμφωνα με τις αρχές της κλασικής στατιστικής μηχανικής, τα άτομα ενός κλασικού αερίου, ευρισκόμενα σε θερμοδυναμική ισορροπία με το περιβάλλον, κινούνται συνεχώς (‘θερμική’ κίνηση), έχοντας μέση κινητική ενέργεια ίση με $3kT/2$, όπου k είναι η σταθερά Boltzmann ($= 8,62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$) και T η απόλυτη θερμοκρασία του αερίου. Ειδικότερα, οι ενέργειες των συστατικών του κλασικού αερίου κατανέμονται με συνεχή τρόπο σύμφωνα με την στατιστική συνάρτηση κατανομής των Maxwell – Boltzmann (M–B):

$$f(E) = \frac{A}{e^{E/kT}} \quad (5.1)$$

όπου $f(E)$ είναι ένα μέτρο της πιθανότητας του κάθε ατόμου να έχει ενέργεια E . Η σταθερά A καθορίζεται από τον ολικό αριθμό των σωματιδίων του συστήματος (σταθερά κανονικοποίησης). Η μορφή της κατανομής M–B παρουσιάζεται στο επάνω μέρος του σχήματος 5.2.

Όμως, το παραπάνω απλό μοντέλο των κλασικών σωματιδίων αποδεικνύεται ότι δεν είναι κατάλληλο για την περιγραφή των ιδιοτήτων του ‘ηλεκτρονικού αερίου’ των μετάλλων. Ο λόγος είναι ότι τα ηλεκτρόνια είναι κβαντικά σωματίδια και όχι κλασικά. Αυτό τα διαφοροποιεί από τα κλασικά σωματίδια ως προς δύο σημαντικά χαρακτηριστικά που ενδιαφέρουν:

1. Οι ενέργειές τους κατανέμονται με ασυνεχή τρόπο σε διακριτές ενεργειακές στάθμες. Ας σημειωθεί ότι η απόσταση μεταξύ των ενεργειακών σταθμών



Σχήμα 5.2 Επάνω: Η κατανομή Maxwell – Boltzmann. Κάτω: Η κατανομή Fermi – Dirac. Οι καμπύλες 1 είναι για $T = 300$ K και οι καμπύλες 2 για $T = 1000$ K. Η οριζόντια κλίμακα είναι διαφορετική.

μεγαλώνει όσο πιο περιορισμένα στον χώρο βρίσκονται τα ηλεκτρόνια. Στην περίπτωση του κρυσταλλικού πλέγματος των στερεών, η μεγάλη έκταση στην οποία μπορούν να βρίσκονται τα ηλεκτρόνια (που είναι όλη η έκταση του κρυστάλλου), κάνει την απόσταση των διαθέσιμων ενεργειακών σταθμών να είναι πάρα πολύ μικρή, δημιουργώντας έτσι την έννοια της ενεργειακής ζώνης (π.χ. ζώνη αγωγιμότητας).

2. Ο τρόπος κατανομής των ηλεκτρονίων στις διαθέσιμες ενεργειακές στάθμες καθορίζεται από την απαγορευτική αρχή του Pauli, η ισχύς της οποίας εξαρτάται από το σπιν των σωματιδίων. Τα ηλεκτρόνια έχουν ημιακέραιο σπιν ($s = 1/2$) και για τέτοια σωματίδια ισχύει η απαγορευτική αρχή. Αυτό συνεπάγεται τον ισχυρό περιορισμό του αριθμού των ηλεκτρονίων σε κάθε επιτρεπτή στάθμη (το πολύ 2). Τα ηλεκτρόνια λοιπόν δεν μπορούν να βρεθούν όλα στην χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη, αλλά καταλαμβάνοντας ανά δύο τις χαμηλότερες στάθμες, συνεχίζουν σε ολοένα και υψηλότερες μέχρι να κατανεμηθούν όλα. Η μέγιστη ενεργειακή στάθμη που καταλαμβάνεται με αυτόν τον τρόπο, στην θερμοκρασία του απόλυτου μηδενός (δηλαδή χωρίς θερμικές διεγέρσεις), καλείται *ενέργεια Fermi*, E_F .

Ο ρόλος της θερμοκρασίας στο κβαντικό αυτό ‘αέριο’ περιορίζεται στις θερμικές διεγέρσεις ενός μικρού μόνο μέρους των ηλεκτρονίων και συγκεκριμένα αυτών που βρίσκονται σε στάθμες με ενέργεια όχι πολύ χαμηλότερη του kT από την ενέρ-

για Fermi. Αυτό συμβαίνει επειδή τα άλλα ηλεκτρόνια, αυτά με ενέργεια ακόμη χαμηλότερη, δεν μπορούν να διεγερθούν θερμικά, εξ αιτίας της απαγορευτικής αρχής, αφού οι ανώτερές τους στάθμες είναι πλήρεις. Η αύξηση λοιπόν της θερμοκρασίας του μετάλλου επηρεάζει μόνο τα ηλεκτρόνια των υψηλότερων κατειλημμένων ενεργειακών σταθμών και μόνο αυτά μπορούν να φτάσουν σε ενέργειες μεγαλύτερες της ενέργειας E_F . Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση ενός κβαντικού 'αερίου', όταν για τα σωματίδια του ισχύει η απαγορευτική αρχή του Pauli, η κατανομή των ενεργειών των σωματιδίων του ακολουθεί την στατιστική Fermi – Dirac (F–D) (γι' αυτό και τέτοια σωματίδια λέγονται *φερμιόνια*).

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad (5.2)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η μονάδα που εμφανίζεται στον παρονομαστή παίζει ρόλο μόνο στις χαμηλές θερμοκρασίες, όπου και διαφοροποιεί σημαντικά την κατανομή F–D έναντι της κατανομής M–B, σχήμα 5.2. Στην περίπτωση αυτή το αέριο των φερμιονίων ονομάζεται *εκφυλισμένο*. Σε μεγάλες θερμοκρασίες (ή σε μικρές πυκνότητες φερμιονίων οπότε η απαγορευτική αρχή δεν παίζει πια ρόλο), η κατανομή F–D γίνεται όμοια με την κατανομή M–B των κλασικών αερίων. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι θερμοκρασίες μέχρι την θερμοκρασία τήξης των μετάλλων θεωρούνται 'χαμηλές' για την θεώρηση αυτή. Αυτό δικαιολογείται αν λάβουμε υπ' όψη μας ότι η μέση θερμική ενέργεια στην θερμοκρασία δωματίου ($T = 293 \text{ K}$) είναι $kT \cong 0,025 \text{ eV}$, ενώ οι τυπικές τιμές της E_F στα μέταλλα είναι μερικά eV. Ακόμη και στους 3000 K, η μέση θερμική ενέργεια είναι μόλις 0,25 eV, δηλαδή πολύ κατώτερη της ενέργειας Fermi των ηλεκτρονίων των μετάλλων.

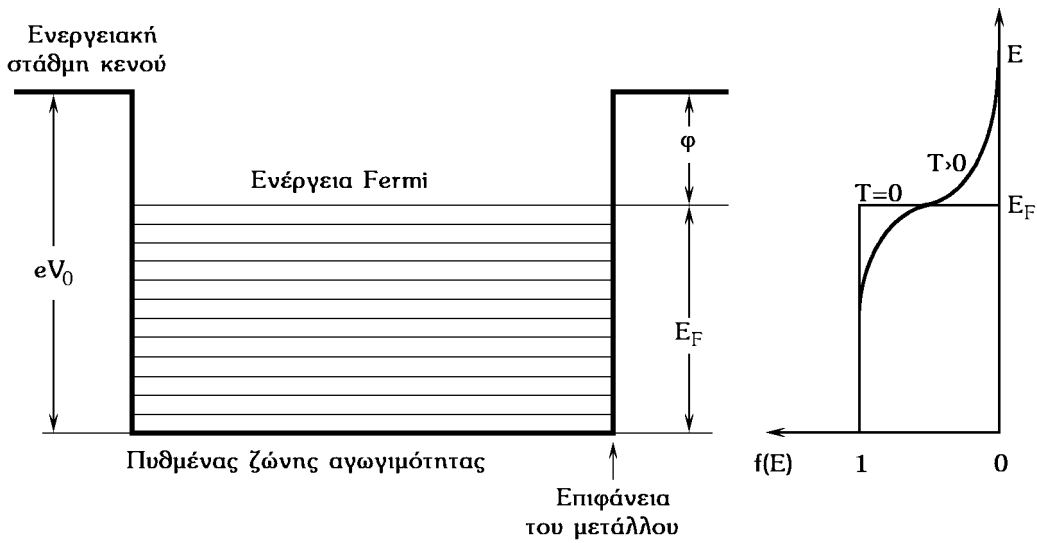
B. Έργο εξόδου και σχέση του Richardson

Προηγουμένως, θεωρήθηκε ότι η κίνηση των ελεύθερων ηλεκτρονίων ενός μετάλλου περιορίζεται απόλυτα από τις επιφάνειες του μετάλλου. Στην πραγματικότητα, το φράγμα δυναμικού που αποτελούν οι επιφάνειες του μετάλλου δεν είναι αδιαπέραστο, αλλά έχει ένα πεπερασμένο ύψος V_0 (η ενεργειακή απόσταση είναι eV_0 από τον πυθμένα της ζώνης αγωγιμότητας, σχήμα 5.3). Έτσι, τα πιο ενεργειακά ηλεκτρόνια της ζώνης αγωγιμότητας, δηλαδή αυτά που έχουν ενέργεια ίση με την ενέργεια Fermi E_F (για $T = 0$), χρειάζονται ένα επιπλέον ποσό ενέργειας:

$$\varphi = eV_0 - E_F \quad (5.3)$$

για να μπορέσουν να φύγουν από το μέταλλο και να κινηθούν ελεύθερα στο κενό. Το έργο αυτό ονομάζεται *έργο εξόδου* των ηλεκτρονίων και θεωρείται ότι έχει καθορισμένη τιμή για κάθε μέταλλο. Πολλές φορές, αντί του φ , σε eV, δίνεται το αντίστοιχο δυναμικό $\Phi = \varphi/e$, σε volts.

Την πειραματική διαπίστωση της διαφυγής των ηλεκτρονίων, καθώς και την μέτρηση του έργου εξόδου τους από τα μέταλλα, την έχουμε με την θερμιονική εκπομπή και το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Το φαινόμενο της θερμιονικής εκπομπής παρατηρείται, παρά το ότι οι θερμοκρασίες που μπορούν να επιτευχθούν, ακόμη και κοντά στην θερμοκρασία τήξης του μετάλλου, αντιστοιχούν σε σχετικά χαμηλή μέση θερμική ενέργεια kT . Το φαινόμενο συμβαίνει επειδή, λόγω της στατιστικής φύσης των θερμικών διεγέρσεων, κάποια ηλεκτρόνια στην 'ουρά' της κατανομής F–D, σχήμα 5.3, αποκτούν θερμική ενέργεια μεγαλύτερη από το έργο εξόδου και αυτό τα καθι-

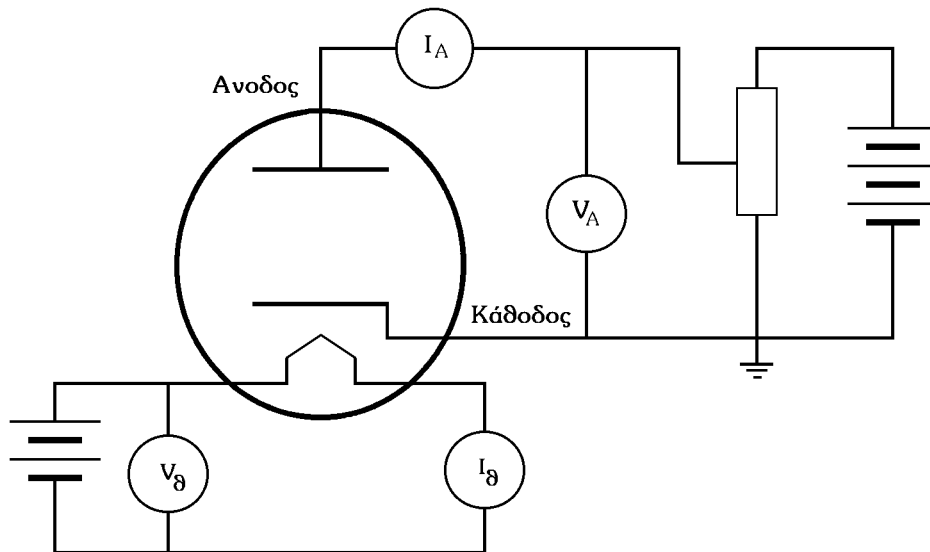


Σχήμα 5.3 Οι ενεργειακές καταστάσεις των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας σε ένα μέταλλο.

στά ικανά να ξεπεράσουν το επιφανειακό φράγμα δυναμικού και να βρεθούν εκτός του μετάλλου.

Οι ηλεκτρονικές λυχνίες κενού είναι οι καταλληλότερες διατάξεις για την ποιοτική και την ποσοτική μελέτη της θερμοϊονικής εκπομπής και αποτελούν την πιο κοινή εφαρμογή του φαινομένου. Οι λυχνίες αυτές είναι αερόκενοι σωλήνες που, στην απλούστερη μορφή τους (δίοδοι λυχνίες), έχουν δύο μόνο ηλεκτρόδια (κάθοδος – άνοδος) μεταξύ των οποίων εφαρμόζεται εξωτερικά μια κατάλληλη διαφορά δυναμικού, σχήμα 5.4. Την κάθοδο αποτελεί ο θερμοϊονικός εκπομπός, δηλαδή ένα δύστηκτο μέταλλο το οποίο, όταν θερμαίνεται σε μια υψηλή θερμοκρασία T , ελευθερώνει ηλεκτρόνια τα οποία κατευθύνονται προς την άνοδο. Μετρώντας το ηλεκτρικό ρεύμα I_A που δημιουργούν στην άνοδο τα ηλεκτρόνια που συλλέγονται, σαν συνάρτηση της εφαρμοζόμενης τάσης V_A , παίρνουμε την λεγόμενη *χαρακτηριστική καμπύλη* της λυχνίας στην θερμοκρασία T , σχήμα 5.5. Αυτό που μας ενδιαφέρει περισσότερο από την χαρακτηριστική καμπύλη για την μελέτη της θερμοϊονικής εκπομπής είναι ότι, όταν η διαφορά δυναμικού μεταξύ της καθόδου και της ανόδου γίνει αρκετά μεγάλη, το ρεύμα σταθεροποιείται, επειδή συλλέγονται όλα τα ηλεκτρόνια που εκπέμπονται από την κάθοδο. Το ρεύμα αυτό ονομάζεται *ρεύμα κόρου*, I_K , και εξαρτάται ισχυρά από την θερμοκρασία T της καθόδου. Ο Richardson, το 1903, πρότεινε γι' αυτήν την εξάρτηση, μια εμπειρική σχέση της μορφής:

$$I_K = Af(T) \exp(-b/T) \tag{5.4}$$



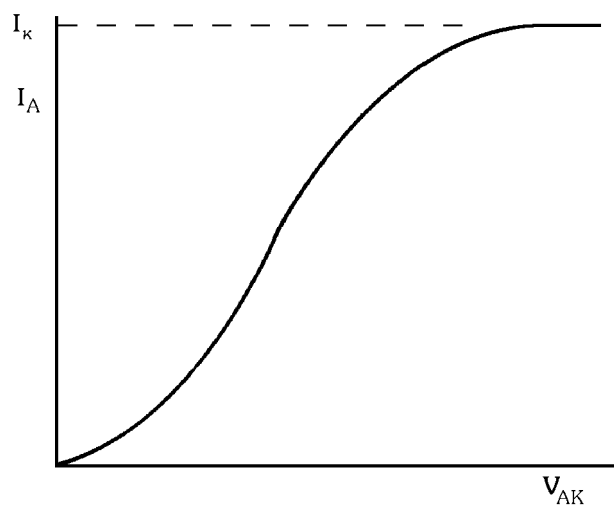
Σχήμα 5.4 Το κύκλωμα μιας διόδου λυχνίας για την μελέτη της θερμιοτικής εκπομπής.

όπου A και b είναι σταθερές, χαρακτηριστικές της καθόδου της λυχνίας και $f(T) = T^n$, ένας όρος μικρού βαθμού που εξαρτάται από την θερμοκρασία. Η ασάφεια στον βαθμό του όρου αυτού οφείλεται στο γεγονός ότι ο άλλος όρος, ο εκθετικός, είναι τόσο έντονος ώστε να υπερκαλύπτει κάθε άλλη εξάρτηση.

Η σχέση του Richardson (βραβείο Nobel 1928), μπορεί να παραχθεί και θεωρητικά από την μελέτη της στατιστικής συμπεριφοράς του ηλεκτρονικού αερίου των μετάλλων. Η ένταση του ρεύματος κόρου ανά μονάδα επιφάνειας της καθόδου (δηλαδή ο αριθμός των εκπεμπόμενων ηλεκτρονίων στην μονάδα του χρόνου), σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας T του μετάλλου, υπολογίστηκε αρχικά χρησιμοποιώντας την κλασική στατιστική M-B. Το ρεύμα κόρου βρέθηκε ίσο με:

$$I_K = en \sqrt{\frac{k}{2\pi m}} T^{1/2} \exp(-eV_0/kT) \quad (5.5)$$

όπου e και m είναι το φορτίο και η μάζα του ηλεκτρονίου, n η ηλεκτρονική πυκνότητα του μετάλλου (αριθμός ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου) και eV_0 το ενεργειακό



Σχήμα 5.5 Η χαρακτηριστική καμπύλη μιας διόδου λυχνίας. I_K είναι το ρεύμα κόρου.

ύψος του φράγματος δυναμικού στην επιφάνεια. Παρατηρούμε ότι η σύγκριση με την εμπειρική σχέση (5.4) δίνει $b = eV_0/k$.

Όμως, όπως είπαμε παραπάνω, σύμφωνα με την κβαντική μηχανική, η σωστή κατανομή για σωματίδια σαν τα ηλεκτρόνια είναι αυτή της στατιστικής F–D. Θεωρώντας ότι τα ηλεκτρόνια είναι φερμιόνια, η σχέση του Richardson γίνεται:

$$I_K = \frac{4\pi emk^2}{h^3} T^2 \exp(-\varphi/kT) \quad (5.6)$$

όπου φ είναι το έργο εξόδου και h η σταθερά του Planck. Εδώ, η σύγκριση με την εμπειρική σχέση δίνει $b = \varphi/k$.

Παρατηρούμε ότι και οι δύο θεωρητικές σχέσεις δίνουν για το ρεύμα κόρου την πολύ έντονη εξάρτηση από την θερμοκρασία, εκθετικής μορφής, με διαφορετική, όμως, εκθετική σταθερά. Επίσης, ο προεκθετικός παράγοντας προκύπτει διαφορετικός στις δύο θεωρήσεις και είναι ανάλογος του $T^{1/2}$ στην πρώτη, ή του T^2 στην δεύτερη.

Στην παρούσα άσκηση θα μελετήσουμε την εξάρτηση του ρεύματος κόρου από την θερμοκρασία της καθόδου μιας διόδου λυχνίας και θα ελέγξουμε την ισχύ της σχέσης (5.6).

II. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

Σκοπός μας είναι:

1. να διαπιστωθεί πειραματικά η εξάρτηση του αριθμού των εκπεμπόμενων ηλεκτρονίων (τιμή του ρεύματος κόρου) από την θερμοκρασία της καθόδου
2. να διαπιστωθεί η ισχύς της σχέσης του Richardson και
3. να βρεθεί το έργο εξόδου φ των ηλεκτρονίων για το υλικό της καθόδου της λυχνίας.

Η πειραματική διάταξη που θα χρησιμοποιηθεί αποτελείται από μια δίοδο λυχνία έμμεσης θέρμανσης, από τροφοδοτικά για την θέρμανση της καθόδου και την τροφοδοσία της λυχνίας και από όργανα μέτρησης της τάσης και του ρεύματος για την θέρμανση της καθόδου και της ανοδικής τάσης και του ρεύματος της λυχνίας.

Στο σχήμα 5.4 παρουσιάζεται το κύκλωμα της διόδου λυχνίας έμμεσης θέρμανσης που χρησιμοποιούμε, καθώς και η συνδεσμολογία για την λήψη των μετρήσεων. Η κάθοδος της λυχνίας θερμαίνεται έμμεσα, από ένα λεπτό νήμα βολφραμίου το οποίο είναι συνδεδεμένο στην πηγή της μεταβλητής συνεχούς τάσης (0 – 5 volts) και έτσι υπάρχει η δυνατότητα μεταβολής της θερμοκρασίας της καθόδου. Ο θερμονικός εκπομπός είναι κάποιο υλικό με μικρό έργο εξόδου στην περιοχή 1,5 – 2,5 eV. Η τάση μεταξύ της καθόδου και της ανόδου, V_{AK} , μπορεί να μεταβάλλεται μέχρι την τιμή των 300 V, για την λήψη της χαρακτηριστικής καμπύλης της διόδου.

Κατ' αρχήν, για την μέτρηση του ρεύματος κόρου, θα πρέπει να ξέρουμε σε ποιές περιοχές της τάσης καθόδου – ανόδου σταθεροποιείται το ρεύμα της λυχνίας. Για τον λόγο αυτό, είναι σκόπιμο να πάρουμε την χαρακτηριστική καμπύλη της διόδου.

Η μέτρηση του ρεύματος κόρου I_K γίνεται απ' ευθείας, με την σύνδεση ενός αμπερομέτρου στο κύκλωμα της ανόδου και έχοντας σταθερή την θερμοκρασία της καθόδου. Επίσης, το δυναμικό καθόδου – ανόδου, V_{AK} , θα πρέπει να είναι σαφώς εντός της περιοχής όπου παρατηρείται ο κόρος. Επειδή το ρεύμα κόρου είναι μετρήσιμο για θερμοκρασίες της καθόδου κοντά στους 1000 K, η τάση θέρμανσης πρέπει να

είναι μεγαλύτερη από 2 V. Επίσης, σε κάθε αλλαγή της θερμοκρασίας της καθόδου, η μέτρηση του ρεύματος κόρου γίνεται μετά από αναμονή λίγων λεπτών, ώστε να έχει επιτευχθεί θερμική ισορροπία.

Η μέτρηση της θερμοκρασίας T της καθόδου δεν γίνεται άμεσα, αλλά έμμεσα. Η θερμοκρασία προσδιορίζεται μέσω της μεταβολής της αντίστασης του θερμαντικού νήματος βολφραμίου με την θερμοκρασία. Την αντίσταση την υπολογίζουμε με τον νόμο του Ohm μετρώντας την τάση θέρμανσης V_θ και το αντίστοιχο ρεύμα I_θ που διαρρέει το νήμα. Σε πρώτη προσέγγιση, η αντίσταση ενός μετάλλου μεταβάλλεται με την θερμοκρασία με γραμμικό τρόπο:

$$R(\theta) = R_0(1 + a\theta) \quad (5.7)$$

όπου a είναι ο θερμικός συντελεστής της αντίστασης του μετάλλου, θ η θερμοκρασία του σε $^\circ\text{C}$ και R_0 η αντίσταση στους 0°C . Για το βολφράμιο, $a = 4,5 \times 10^{-3} \text{ grad}^{-1}$ (Handbook of Chemistry and Physics, E – 84), οπότε η θερμοκρασία του νήματος για τις ανάγκες της άσκησης θα υπολογιστεί από την σχέση:

$$T(\text{Kelvin}) = \frac{R(\theta) - R_0}{4,5 \times 10^{-3} R_0} + 273 \quad (5.8)$$

Η τιμή της R_0 μπορεί να βρεθεί εύκολα αν στην αρχή της άσκησης, όταν η λυχνία είναι κρύα, μετρηθεί με το ωμόμετρο η αντίσταση του νήματος στην θερμοκρασία δωματίου, R_{20} .

Ο προσδιορισμός της θερμοκρασίας της καθόδου μέσω της αντίστασης του νήματος θέρμανσης δεν είναι ακριβής, για διάφορους λόγους, ο κυριότερος των οποίων είναι ότι η μετρούμενη αντίσταση οφείλεται, εκτός από την αντίσταση του μετάλλου του νήματος και στην σημαντική αντίσταση της κόλλησης του νήματος η οποία μεταβάλλεται ελάχιστα με την θερμοκρασία και πάντως όχι σύμφωνα με την σχέση (5.7). Άλλοι λόγοι είναι η ελαφρά εξάρτηση του συντελεστή a από την θερμοκρασία, η διαφορετική θερμοκρασία κατά μήκος του νήματος (χαμηλότερη θερμοκρασία στα σημεία στήριξης), η χαμηλότερη θερμοκρασία της καθόδου σε σχέση με την θερμοκρασία του νήματος θέρμανσης κ.λπ. Εν τούτοις, αυτή είναι η προσφορότερη μέθοδος και χρησιμοποιείται συχνά, τουλάχιστον όταν δεν υπάρχει απαίτηση για μεγάλη ακρίβεια στην μέτρηση της θερμοκρασίας.

Για την πειραματική απόδειξη της σχέσης του Richardson εργαζόμαστε ως εξής:

Μετασχηματίζουμε την σχέση (5.6) ώστε να προκύψει μια εύκολα αναγνωρίσιμη καμπύλη. Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το T^2 και λογαριθμίζουμε:

$$\ln\left(\frac{I_K}{T^2}\right) = \ln\left(\frac{4\pi emk^2}{h^3}\right) - \frac{\varphi}{kT}$$

Θέτοντας:

$$y = \ln\left(\frac{I_K}{T^2}\right)$$

$$x = \frac{1}{T}$$

προκύπτει:

$$y = \ln\left(\frac{4\pi emk^2}{h^3}\right) - \frac{\varphi}{k}x = \alpha + \beta x$$

Παρατηρούμε ότι προκύπτει μια ευθεία γραμμή με κλίση $\beta = \varphi/k$. Σχεδιάζουμε, λοιπόν, την καμπύλη με άξονες $y = \ln(I_K/T^2)$ και $x = 1/T$. Αν διαπιστώσουμε ότι τα πειραματικά μας σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία γραμμή, συμπεραίνουμε ότι η σχέση του Richardson περιγράφει σωστά το φαινόμενο της θερμοϊονικής εκπομπής των ηλεκτρονίων. Από την κλίση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων υπολογίζεται το έργο εξόδου φ του υλικού της καθόδου της λυχνίας.

III. ΟΡΓΑΝΑ

1. Δίοδος λυχνία
2. Τροφοδοτικό συνεχούς χαμηλής τάσης 0 – 5 volts.
3. Τροφοδοτικό συνεχούς τάσης 0 – 300 volts.
4. Βολτόμετρα (2), αμπερόμετρα (2).
5. Καλώδια σύνδεσης.

IV. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

1. Αναγνωρίστε τις συσκευές.
2. Μετρήστε με το ωμόμετρο την αντίσταση του νήματος θέρμανσης της καθόδου στην θερμοκρασία δωματίου (R_{20}) και βρείτε την R_0 .

Χαρακτηριστική καμπύλη της λυχνίας.

3. Πραγματοποιείτε το κύκλωμα του σχήματος 5.4.
4. Για μια τάση θέρμανσης V_θ μεταξύ 4 και 5 V πάρτε ζεύγη τιμών: τάση V_{AK} - ρεύματος ανόδου I_K .
5. Σχεδιάστε την χαρακτηριστική καμπύλη της διόδου. Προσπαθήστε να κατανοήσετε την μορφή της καμπύλης. Φθάνει η καμπύλη σε κόρο; Αν όχι, θεωρήστε στα επόμενα βήματα ότι έχουμε ρεύμα κόρου για την μέγιστη τιμή της τάσης που παρέχει το τροφοδοτικό. Σε όλα τα επόμενα βήματα χρησιμοποιούμε την τάση αυτή σαν την διαφορά δυναμικού ανόδου – καθόδου.

Εξάρτηση του ρεύματος κόρου από την θερμοκρασία.

6. Επιλέξτε μια τιμή της τάσης θέρμανσης κοντά στα 2,5 V ώστε να έχετε κάποιο μετρήσιμο ρεύμα κόρου I_K . Μετρήστε την τάση θέρμανσης της καθόδου V_θ , το ρεύμα θέρμανσης I_θ και το ρεύμα κόρου I_K . Πόσο είναι το πειραματικό σφάλμα κάθε μέτρησης;
7. Υπολογίστε την αντίσταση του νήματος και την θερμοκρασία της καθόδου. Πόσο είναι το σφάλμα κάθε τιμής;
8. Επαναλάβετε τα βήματα 6 και 7 για διαφορετικές τάσεις θέρμανσης, μέχρι περίπου τα 5 V. Μετά από κάθε αλλαγή της τάσης θέρμανσης περιμένετε 3 – 5 min πριν λάβετε την μέτρηση.
9. Σχεδιάστε το διάγραμμα του $y = \ln(I_K/T^2)$ σαν συνάρτηση του $x = 1/T$. Στο ίδιο διάγραμμα σχεδιάστε και τα σφάλματα κάθε πειραματικού σημείου. Ισχύει ο νόμος του Richardson;

68 Θερμιονική εκπομπή

10. Με την βοήθεια των ελαχίστων τετραγώνων βρείτε την καλύτερη ευθεία που διέρχεται από τα πειραματικά σημεία σας. Βρείτε την κλίση της ευθείας και το έργο εξόδου ϕ των ηλεκτρονίων του υλικού της καθόδου. Προσδιορίστε το πειραματικό σφάλμα της μέτρησής σας.
11. Σχόλια, συμπεράσματα.

ΑΣΚΗΣΗ 6

ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ

Σκοπός της άσκησης είναι η ανάδειξη της κυματικής φύσης των ηλεκτρονίων.

I. ΘΕΩΡΙΑ

Το 1920 ήταν γνωστό ότι το φως, εκτός από την κυματική του φύση, είχε και σωματιδιακή (ερμηνεία της εκπομπής του μέλανος σώματος από τον Planck το 1900, ερμηνεία του φωτοηλεκτρικού φαινομένου από τον Einstein το 1905, ερμηνεία του φαινομένου Compton το 1920). Το 1924 ο Louis de Broglie πρότεινε ότι και *τα κινούμενα ηλεκτρόνια (και γενικά κάθε κινούμενο σωματίδιο) έχουν, εκτός από την σωματιδιακή φύση και κυματική φύση*. Η πρόταση αυτή επαληθεύτηκε με το πείραμα των Davisson – Germer το 1925. Το 1931 οι Esterman, Frisch και Stern απέδειξαν πειραματικά την κυματική φύση των ουδέτερων σωματιδίων. Στα επόμενα χρόνια αποδείχθηκε η κυματική φύση των νετρονίων.

Ο Louis de Broglie, κατ' αναλογία των φωτονίων που η ορμή τους είναι $p = h/\lambda$, πρότεινε ότι το μήκος κύματος των κινούμενων ηλεκτρονίων δίνεται από την σχέση:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (6.1)$$

όπου h είναι η σταθερά του Planck και p η ορμή των ηλεκτρονίων. Αυτό βέβαια με την προϋπόθεση ότι η ταχύτητα των ηλεκτρονίων είναι μικρή ώστε να μην απαιτούνται διορθώσεις από την θεωρία της σχετικότητας. Αν η ταχύτητα των ηλεκτρονίων είναι μεγάλη, ενέργεια των ηλεκτρονίων μεγαλύτερη από 10 keV, τότε το μήκος κύματος δίνεται από την σχέση:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0T}} \left(1 + \frac{T}{2m_0c^2}\right)^{1/2} \quad (6.2)$$

όπου T είναι η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων και m_0 η μάζα ηρεμίας τους.

Συνήθως τα ηλεκτρόνια παράγονται από ένα θερμαινόμενο νήμα και στην συνέχεια επιταχύνονται με μια διαφορά δυναμικού V . Στην περίπτωση αυτή η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων δίνεται από την σχέση:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = eV \quad (6.3)$$

Αντικατάσταση της p στην σχέση (6.1) δίνει:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2emV}} \quad (6.4)$$

Εφαρμογή: Για τάση επιτάχυνσης $V = 5 \text{ kV}$ και με αντικατάσταση των τιμών της σταθεράς του Planck ($h = 4,135 \times 10^{-21} \text{ MeV} \cdot \text{s}$), της μάζας του ηλεκτρονίου ($m = 0,5110 \text{ MeV}/c^2$) και του φορτίου του ηλεκτρονίου ($e = 1,6022 \times 10^{-19} \text{ C}$), το μήκος κύματος των ηλεκτρονίων είναι $\lambda = 0,1734 \text{ \AA}$.

Για να αναδείξουμε την κυματική φύση των ηλεκτρονίων πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποιο φαινόμενο που συμβαίνει στα κύματα. Σαν τέτοιο φαινόμενο χρησιμοποιούμε την περίθλαση. Όπως είναι γνωστό από την κυματική, για να γίνει η περίθλαση θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποιο φράγμα περίθλασης με σταθερά φράγματος της τάξης μεγέθους του μήκους κύματος. Επειδή το μήκος κύματος των κινούμενων ηλεκτρονίων είναι της τάξης μεγέθους του \AA , το φράγμα περίθλασης που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε θα πρέπει να έχει σταθερά της ίδιας τάξης μεγέθους. Τέτοια φράγματα περίθλασης είναι οι κρύσταλλοι.

Ένας κρύσταλλος δεν είναι τίποτε άλλο από την περιοδική επανάληψη κάποιας στοιχειώδους μονάδας, της *κρυσταλλικής κυψελίδας*, στις τρεις διαστάσεις. Η απόσταση των ατόμων σε έναν κρύσταλλο είναι της τάξης μεγέθους του \AA . Τα άτομα των κρυστάλλων, λόγω της συμμετρίας του κρυστάλλου, σχηματίζουν ομάδες παραλλήλων και ισαπεχόντων επιπέδων (*δικτυωτά επίπεδα*). Ο αριθμός και ο προσανατολισμός αυτών των επιπέδων εξαρτάται από την δομή της κρυσταλλικής κυψελίδας.

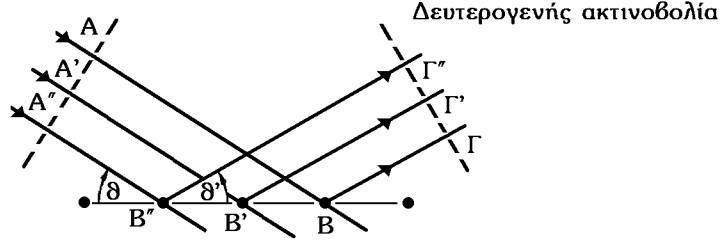
Πριν από την ανάδειξη της κυματικής φύσης των κινούμενων σωματιδίων, η μελέτη των κρυστάλλων γινόταν μόνο με τις ακτίνες X. Οι νόμοι που ισχύουν για την περίθλαση των ακτίνων X θα ισχύουν και για την περίθλαση των ηλεκτρονίων (και γενικά κάθε κινούμενου σωματιδίου).

II. ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΤΩΝ ΑΚΤΙΝΩΝ X

Όταν ακτίνες X προσπίπτουν σε ένα άτομο, το άτομο ταλαντώνεται σε φάση με την προσπίπτουσα ακτινοβολία. Από την ταλάντωση εκπέμπεται ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία του ίδιου μήκους κύματος με την προσπίπτουσα και σε φάση μ' αυτήν.

Ας θεωρήσουμε ότι μια παράλληλη δέσμη ακτίνων X μήκους κύματος λ προσπίπτει σε ένα δικτυωτό επίπεδο με γωνία πρόσπτωσης θ . Η ακτινοβολία που εκπέμπεται από τα άτομα του δικτυωτού επιπέδου συμβάλλει. Το αποτέλεσμα της συμβολής προκύπτει με την μέθοδο των ισοφασικών σφαιρών του Huygens. Η δευτερογενής ακτινοβολία συμβάλλει ανοικοδομητικά σε ορισμένη κατεύθυνση, εκεί όπου οι διαφορές πορείας $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma$, $A''B''\Gamma''$ κ.λπ. είναι ίσες, σχήμα 6.1. Η συνθήκη της ανοικοδομητικής συμβολής απαιτεί η γωνία πρόσπτωσης να είναι ίση με την γωνία εκπομπής της δευτερογενούς ακτινοβολίας ή:

Πρωτογενής ακτινοβολία



Σχήμα 6.1 Πρόσπτωση των ακτίνων X σε ένα δικτυωτό επίπεδο. Ανοικοδομητική συμβολή έχουμε μόνον όταν $\theta = \theta'$.

$$\theta = \theta' \quad (6.5)$$

Προς τις άλλες διευθύνσεις έχουμε απόσβεση. Επειδή το φαινόμενο μοιάζει ποιοτικά με την ανάκλαση του φωτός σε μια λεία επιφάνεια, πολλές φορές μιλάμε για ανάκλαση των ακτίνων X.

Επειδή οι ακτίνες X εισχωρούν σε βάθος στον κρύσταλλο, τα ίδια συμβαίνουν και στα εσωτερικά δικτυωτά επίπεδα. Για να συμβάλλουν ανοικοδομητικά οι δευτερογενείς ακτινοβολίες από όλα τα δικτυωτά επίπεδα, πρέπει η διαφορά φάσης των δευτερογενών ακτινοβολιών από κάθε δικτυωτό επίπεδο να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π , ή η διαφορά πορείας των δεσμών ABΓ να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος λ , σχήμα 6.2. Αν d είναι η απόσταση των δικτυωτών επιπέδων μεταξύ τους τότε η παραπάνω συνθήκη γράφεται:

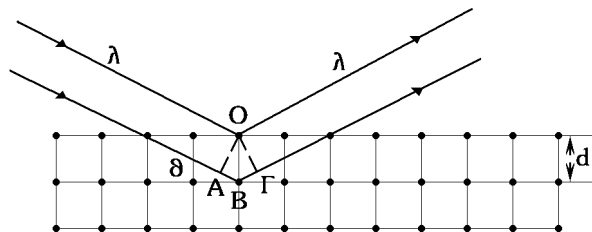
$$2d\eta\mu\theta = n\lambda \quad (6.6)$$

όπου n είναι ένας ακέραιος αριθμός. Οι κροσσοί συμβολής που προκύπτουν για $n = 1$ λέγονται κροσσοί πρώτης τάξης, για $n = 2$ δευτέρας τάξης κ.ο.κ.. Η σχέση (6.6) είναι γνωστή σαν νόμος του Bragg.

Ο νόμος του Bragg προβλέπει ότι *αν μια δέσμη ακτίνων X μήκους κύματος λ προσπέσει σε έναν κρύσταλλο θα υπάρξει ανοικοδομητική συμβολή μόνο σε μια καθορισμένη γωνία πρόσπτωσης για την οποία ισχύει η σχέση (6.6).*

III. ΣΚΕΔΑΣΗ ΤΩΝ ΑΚΤΙΝΩΝ X ΑΠΟ ΛΕΠΤΗ ΣΚΟΝΗ

Όλα τα παραπάνω ισχύουν για την περίπτωση που έχουμε μόνον έναν κρύσταλλο ή, όπως έχει καθιερωθεί, όταν το δείγμα μας είναι μονοκρυσταλλικό. Τι γίνεται, όμως, όταν το δείγμα μας είναι λεπτή σκόνη (που σημαίνει πολλοί μονοκρυσταλλοί τυχαία προσανατολισμένοι);



Σχήμα 6.2 Η δέσμη των ακτίνων X που σκεδάζεται κατά γωνία θ έχει μέγιστη ένταση όταν ισχύει ο νόμος του Bragg. Η απόσταση των δικτυωτών επιπέδων είναι d , το μήκος κύματος της ακτινοβολίας είναι λ και η γωνία $\widehat{AOT} = 2\theta$.

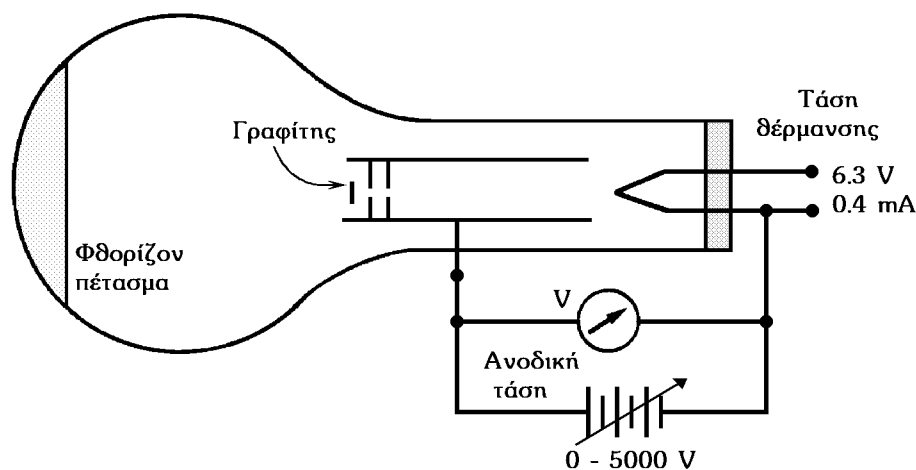
Στην περίπτωση αυτή, κάθε μονοκρυστάλλος συμπεριφέρεται όπως περιγράφηκε προηγουμένως. Επειδή, όμως, όλοι οι μονοκρυστάλλοι που ικανοποιούν τον νόμο του Bragg, δηλαδή σχηματίζουν την κατάλληλη γωνία θ ώστε να ικανοποιείται η σχέση (6.6) για το δεδομένο μήκος κύματος των ακτίνων X, βρίσκονται γύρω από την δέσμη των ακτίνων X, το αποτέλεσμα που παρατηρούμε αλλάζει. Αντί να έχουμε μια λεπτή δευτερογενή δέσμη, σαν αποτέλεσμα της συμβολής, έχουμε μια κωνική επιφάνεια. Η τομή της κωνικής επιφάνειας με ένα φθορίζον πέτασμα κάθετο στην διεύθυνση της προσπίπτουσας στο πέτασμα ακτινοβολίας θα είναι ένας κύκλος.

IV. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

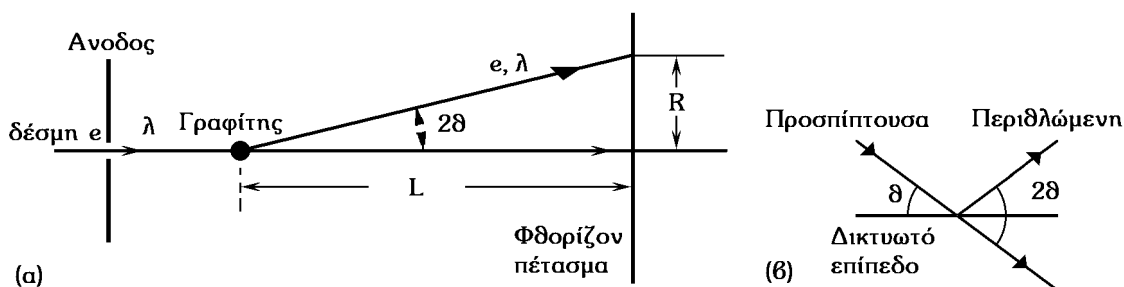
Η πειραματική διάταξη αποτελείται από έναν αερόκενο σωλήνα, τον σωλήνα περίθλασης, ένα τροφοδοτικό χαμηλής τάσης για την θέρμανση του νήματος και ένα τροφοδοτικό υψηλής τάσης για την επιτάχυνση των ηλεκτρονίων, σχήμα 6.3.

Ο σωλήνας περίθλασης περιέχει ένα κανόνι ηλεκτρονίων (θερμαινόμενο νήμα, διαφράγματα για να σχηματιστεί μια λεπτή δέσμη ηλεκτρονίων και την άνοδο). Η άνοδος έχει μια οπή στο κέντρο της από την οποία εξέρχεται η δέσμη των ηλεκτρονίων. Το υλικό στο οποίο θα γίνει η περίθλαση, αν τα ηλεκτρόνια έχουν και κυματική φύση, είναι λεπτή σκόνη γραφίτη. Ο γραφίτης είναι τοποθετημένος σε μια κατάλληλη θήκη με λεπτά τοιχώματα και βρίσκεται στην οπή της ανόδου.

Απέναντι από την άνοδο υπάρχει ένα φθορίζον πέτασμα όπου παρατηρούμε τα αποτελέσματα της σκέδασης των ηλεκτρονίων από την λεπτή σκόνη του γραφίτη. Επειδή η δευτερογενής ακτινοβολία είναι κωνική, η τομή της στο φθορίζον πέτασμα είναι κύκλος ή δακτύλιος. Η απόσταση ανόδου – φθορίζοντος πετάσματος αναγράφεται στην θέση της άσκησης.



Σχήμα 6.3 Η πειραματική διάταξη για την ανάδειξη της κυματικής φύσης των ηλεκτρονίων.



Σχήμα 6.4 α) Σχηματική παράσταση της δέσμης των ηλεκτρονίων στον σωλήνα περίθλασης. β) Λεπτομέρεια του σχήματος στην περιοχή του γραφίτη.

Στο σχήμα 6.4 παρουσιάζεται μια σχηματική παράσταση της δέσμης των ηλεκτρονίων στον σωλήνα περίθλασης. Αν L είναι η απόσταση γραφίτη – φθορίζοντος πετάσματος, τότε ισχύει:

$$\varepsilon\varphi 2\theta = \frac{R}{L} \quad (6.7)$$

όπου R είναι η ακτίνα του δακτυλίου στο φθορίζον πέτασμα.

Αν η γωνία 2θ είναι μικρή τότε:

$$\varepsilon\varphi 2\theta \cong \eta\mu 2\theta \cong 2\eta\mu\theta \quad (6.8)$$

Η σχέση του Bragg, για $n = 1$, γίνεται:

$$2d\eta\mu\theta = \lambda \quad (6.9)$$

Από τις σχέσεις (6.7), (6.8) και (6.9) προκύπτει ότι:

$$R = \frac{L}{d} \lambda \quad (6.10)$$

Αν τα ηλεκτρόνια έχουν και κυματική φύση, αντικαθιστώντας την έκφραση του λ από την σχέση (6.4), προκύπτει ότι:

$$D = 2R = \frac{2Lh}{d} \frac{1}{\sqrt{2em}} \frac{1}{\sqrt{V}} \quad (6.11)$$

Αν λοιπόν τα ηλεκτρόνια έχουν και κυματική φύση, **η διάμετρος του δακτυλίου στο φθορίζον πέτασμα είναι ανάλογη του αντίστροφου της τετραγωνικής ρίζας της τάσης επιτάχυνσης.**

A. Απόδειξη της κυματικής φύσης των ηλεκτρονίων

Για την απόδειξη της κυματικής φύσης των ηλεκτρονίων εργαζόμαστε ως εξής:

Μετράμε την διάμετρο των δακτυλίων σαν συνάρτηση της υψηλής τάσης.

Μετασχηματίζουμε την σχέση (6.11) ώστε να προκύψει μια εύκολα αναγνωρίσιμη καμπύλη. Κάνουμε τους παρακάτω μετασχηματισμούς:

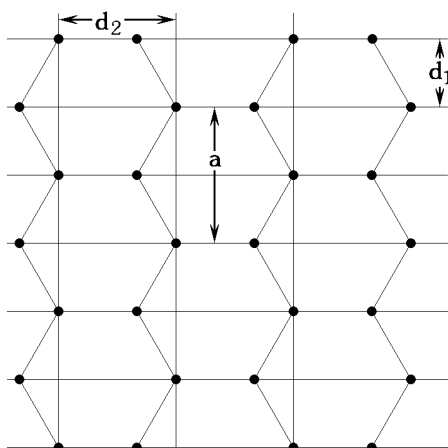
$$y = D = 2R$$

$$x = 1/\sqrt{V}$$

Η σχέση (6.11) γίνεται:

$$y = \frac{2Lh}{d} \frac{1}{\sqrt{2em}} x = \beta x$$

δηλαδή, μια ευθεία γραμμή.



Σχήμα 6.5 Ένα επίπεδο με άτομα γραφίτη. Είναι φανερό ότι αναμένουμε δύο τουλάχιστον ομάδες παράλληλων επιπέδων.

Σχεδιάζουμε, λοιπόν, την διάμετρο των δακτυλίων σαν συνάρτηση του αντίστροφου της τετραγωνικής ρίζας της τάσης. Αν προκύψει ευθεία γραμμή, τότε αποδεικνύεται η σχέση (6,11) και συμπεραίνουμε ότι τα ηλεκτρόνια έχουν και κυματική φύση.

B. Η κρυσταλλική κυψελίδα του γραφίτη

Η κρυσταλλική κυψελίδα του γραφίτη είναι ένα εξαγωνικό πρίσμα με βάση ένα κανονικό εξάγωνο. Οι σταθερές του πλέγματος είναι $a = 2,4562 \pm 0,0001 \text{ \AA}$ (a είναι η μικρή διαγώνιος του κανονικού εξάγωνου, σχήμα 6.5) και $c = 6,6943 \pm 0,0007 \text{ \AA}$ (c είναι το ύψος του πρίσματος). Τα άτομα του γραφίτη βρίσκονται στις κορυφές του πρίσματος. Πολύ εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι η πλευρά του κανονικού εξάγωνου είναι ίση με $1,4181 \pm 0,0001 \text{ \AA}$. Λόγω αυτής της δομής του γραφίτη, στην άσκηση δεν μπορούμε να παρατηρήσουμε φαινόμενα περίθλασης από τα δικτυωτά επίπεδα των οποίων η απόσταση είναι της τάξης μεγέθους της c .

Από το σχήμα 6.5 προκύπτει πολύ εύκολα ότι αναμένουμε δύο ομάδες δικτυωτών επιπέδων με αποστάσεις $d_1 = 1,2281 \pm 0,0001 \text{ \AA}$ και $d_2 = 2,1271 \pm 0,0001 \text{ \AA}$.

V. ΟΡΓΑΝΑ

1. Σωλήνας περίθλασης.
2. Τροφοδοτικό χαμηλής τάσης (6,3 volts ac)
3. Τροφοδοτικό υψηλής τάσης 0 – 5000 volts dc.
4. Βολτόμετρο 0 – 5000 volts.
5. Καλώδια σύνδεσης

Τα 2, 3 και 4 περικλείονται σε κοινό περίβλημα.

VI. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

1. Αναγνωρίστε τις συσκευές.
2. Πραγματοποιείτε το κύκλωμα του σχήματος 6.3.
3. Μετά τον έλεγχο της συνδεσμολογίας θέσατε τις συσκευές υπό τάση.
4. Ρυθμίστε την υψηλή τάση στην μέγιστη τιμή της.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Η υψηλή τάση δεν πρέπει να υπερβεί την τιμή των 5 kV, γιατί υπάρχει κίνδυνος υπερθέρμανσης του γραφίτη και στην συνέχεια εξάχνωσής του. Επίσης, όταν ο σωλήνας λειτουργεί σε υψηλή τάση μεγαλύτερη από 5 kV παράγονται ακτίνες X.

5. Παρατηρείστε την εικόνα στο φθορίζον πέτασμα. Πόσους δακτυλίους παρατηρείτε; Τι συμπέρασμα βγάζετε;
6. Μετρήστε την διάμετρο των δακτυλίων.
7. Ποιά σφάλματα υπεισέρχονται στις μετρήσεις σας; Εκτιμήστε τα σφάλματα αυτά. Ποιά η αιτία τους;
8. Επαναλάβετε το βήμα 6 μειώνοντας την υψηλή τάση κατά 200 V μέχρι περίπου τα 2000 V.
9. Με την βοήθεια των μετρήσεών σας μπορείτε να αποδείξετε ότι τα ηλεκτρόνια έχουν και κυματική φύση;
10. Με την βοήθεια των ελαχίστων τετραγώνων υπολογίστε τις καλύτερες ευθείες που διέρχονται από τα πειραματικά σας δεδομένα.
11. Από την κλίση των ευθειών υπολογίστε τις σταθερές του πλέγματος του γραφίτη θεωρώντας γνωστή την τιμή της σταθεράς του Planck.
12. Σχόλια, συμπεράσματα.

ΑΣΚΗΣΗ 8

ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΚΒΑΝΤΙΚΩΝ ΜΕΤΑΠΤΩΣΕΩΝ ΣΤΟ ΑΤΟΜΟ ΤΟΥ Na

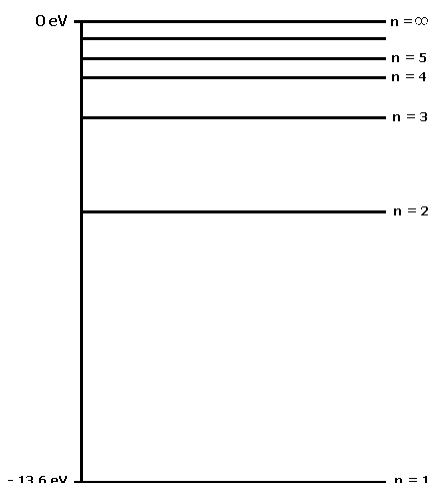
Σκοπός της άσκησης είναι η μελέτη των διεγερμένων ενεργειακών σταθμών του ατόμου του νατρίου. Πιο συγκεκριμένα, η εύρεση της ενέργειας των σημαντικότερων κβαντικών μεταπτώσεων μεταξύ των διεγερμένων σταθμών και της βασικής στάθμης του ατόμου του νατρίου καθώς επίσης και η παρατήρηση της λεπτής υφής τους.

I. ΘΕΩΡΙΑ

Ο πιο άμεσος τρόπος μελέτης των διεγερμένων ενεργειακών σταθμών ενός ατόμου είναι μέσω της παρατήρησης του χαρακτηριστικού γραμμικού φάσματος του φωτός που εκπέμπεται κατά την αποδιέγερσή του. Το φως αυτό το παίρνουμε συνήθως με ηλεκτρική εκκένωση σε μια λυχνία που περιέχει το στοιχείο είτε σαν μονοατομικό αέριο ή σαν ατμούς του στοιχείου. Λαμβάνοντας το φάσμα του φωτός με ένα φασματόμετρο, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις ενέργειες, τις συχνότητες και τα μήκη κύματος των διαφόρων γραμμών του. Το φάσμα κάθε στοιχείου είναι μοναδικό και αποτελεί το 'δακτυλικό αποτύπωμά' του. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την δυνατότητα ανίχνευσης του στοιχείου από την ακτινοβολία του, ακόμη και σε ελάχιστες ποσότητες ή σε μεγάλες αποστάσεις, όπως για παράδειγμα στον μεσοαστρικό χώρο και στις επιφάνειες των αστέρων.

A. Ενεργειακές στάθμες του ατόμου του υδρογόνου

Σαν εισαγωγή, θα εξετάσουμε το απλούστερο άτομο, δηλαδή το άτομο του υδρογόνου. Αυτό, σύμφωνα με το πρότυπο του Bohr, αποτελείται από ένα πρωτόνιο γύρω από το οποίο περιστρέφεται ένα ηλεκτρόνιο. Οι ενέργειες όλων των δυνατών καταστάσεων στις οποίες μπορεί να βρεθεί το μοναδικό ηλεκτρόνιό του είναι:



Σχήμα 8.1 Οι ενεργειακές στάθμες του ατόμου του υδρογόνου.

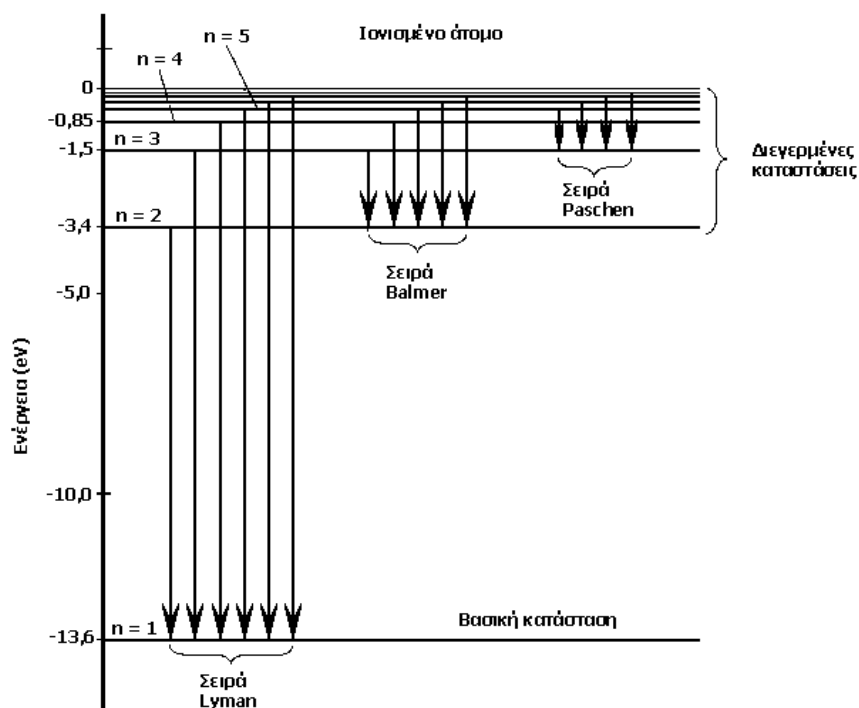
$$E_n = - \left[\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m_0 e^4}{2\hbar^2} \right] \frac{1}{n^2} = -13,6 \text{ eV} \frac{1}{n^2} \quad (8.1)$$

όπου m_0 και e είναι η μάζα ηρεμίας και το φορτίο του ηλεκτρονίου αντίστοιχα και n ένας ακέραιος αριθμός, γνωστός σαν ο *κύριος κβαντικός αριθμός*, που παίρνει τιμές $n = 1, 2, 3, \dots$. Η παράσταση μέσα στις αγκύλες έχει τιμή ίση με $13,6 \text{ eV}$ και αναφέρεται και σαν *ενέργεια ιονισμού* (ή *ενέργεια σύνδεσης*) του ατόμου του υδρογόνου. Στο σχήμα 8.1 φαίνονται οι ενεργειακές στάθμες του ατόμου του υδρογόνου όπως προκύπτουν από την σχέση (8.1).

Κατά την αποδιέγερση ενός διεγερμένου ατόμου υδρογόνου, το ηλεκτρόνιο που βρίσκεται σε κάποια ενεργειακή κατάσταση με κύριο κβαντικό αριθμό n_i μεταπίπτει σε μια άλλη ενεργειακή κατάσταση με κύριο κβαντικό αριθμό n_f . Η διαφορά της ενέργειας $\Delta E = |E_f - E_i|$ ανάμεσα σ' αυτές τις δύο καταστάσεις αποδίδεται κυρίως με την εκπομπή ενός φωτονίου με ενέργεια $h\nu = \Delta E$. Άρα, για την ενέργεια του εκπεμπόμενου φωτονίου ισχύει:

$$h\nu = 13,6 \text{ eV} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (8.2)$$

Στο σχήμα 8.2 παρουσιάζονται οι επιτρεπτές μεταπτώσεις του ατόμου του υδρογόνου. Οι φασματικές γραμμές του υδρογόνου σχηματίζουν ομάδες (σειρές) ανάλογα με την τελική ενεργειακή κατάσταση της μετάπτωσης. Οι πέντε πρώτες φασματικές σειρές του ατόμου του υδρογόνου είναι γνωστές με τα ονόματα αυτών που τις ανακάλυψαν και είναι οι σειρές Lyman, Balmer, Paschen, Brackett και Pfund. Οι σειρές αυτές προκύπτουν από την σχέση (8.2) για τελική κατάσταση με τιμή του κυρίου κβαντικού αριθμού $n_f = 1, 2, 3, 4$ και 5 αντίστοιχα. Στην ορατή περιοχή του φάσματος βρίσκονται μόνον οι τέσσερις πρώτες γραμμές της σειράς Balmer. Οι υπόλοιπες γραμμές της σειράς Balmer και η σειρά Lyman βρίσκονται στην περιοχή του υπεριώδους, ενώ οι υπόλοιπες σειρές στην περιοχή του υπέρυθρου.



Σχήμα 8.2 Οι μεταπτώσεις μεταξύ των ενεργειακών σταθμών του ατόμου του υδρογόνου. Οι μεταπτώσεις που καταλήγουν στις στάθμες με $n = 1, 2, 3$ ανήκουν στις σειρές Lyman, Balmer, Paschen αντίστοιχα.

Πηγαίνοντας σε πιο πολύπλοκα άτομα από το άτομο του υδρογόνου, διαπιστώνεται ότι τα φάσματα που λαμβάνονται πειραματικά είναι πολύ πιο σύνθετα και δεν είναι δυνατό να περιγραφούν με την βοήθεια ενός μόνο κβαντικού αριθμού, του n . Με άλλα λόγια, το πρότυπο του Bohr δεν μπορεί να περιγράψει το παρατηρούμενο φάσμα των ατόμων εκτός ίσως από αυτό του υδρογόνου και των υδρογονοειδών ατόμων*. Η θεωρία που περιγράφει πλήρως και λεπτομερώς τα φάσματα όλων των ατόμων (ακόμη και την πολύ δύσκολα παρατηρούμενη λεπτή υφή στο άτομο του υδρογόνου), είναι η κβαντική θεωρία του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (κβαντική ηλεκτροδυναμική, QED). Στα επόμενα θα μελετήσουμε το φάσμα του ατόμου του νατρίου, ενός ατόμου αντιπροσωπευτικού των ατόμων των αλκαλίων.

B. Ενεργειακές στάθμες του ατόμου του νατρίου

Τα αλκάλια αποτελούνται από άτομα με πολλά ηλεκτρόνια και η χρήση τους προτιμάται στα εργαστήρια ατομικής φασματοσκοπίας επειδή δίνουν φάσματα σχετικά απλά και με εύκολα παρατηρήσιμη την λεπτή υφή τους. Επίσης, τα φάσματά τους μπορούν να περιγραφούν μέσω μιας τροποποιημένης εκδοχής του προτύπου του Bohr, η οποία περιλαμβάνει την εισαγωγή της έννοιας του δραστικού φορτίου Z_{eff} (θεωρία Hartree).

Τα φάσματα των αλκαλίων έχουν πολλές ομοιότητες με τα φάσματα του υδρογόνου και των υδρογονοειδών ατόμων, επειδή τα ηλεκτρόνιά τους διατάσσονται σε πλήρεις ηλεκτρονικές στοιβάδες, εκτός από ένα ηλεκτρόνιο που βρίσκεται μόνο του

* Υδρογονοειδή είναι τα άτομα που έχουν χάσει όλα τους τα ηλεκτρόνια εκτός από ένα.

στην εξωτερική στοιβάδα του ατόμου. Το νάτριο είναι ένα στοιχείο με ατομικό αριθμό $Z = 11$. Το άτομο του, έχοντας 11 ηλεκτρόνια, έχει πλήρως συμπληρωμένες τις δύο πρώτες ηλεκτρονικές στοιβάδες του. Στην πρώτη στοιβάδα ($n = 1$) έχει δύο ηλεκτρόνια και στην δεύτερη ($n = 2$) έχει 8 ηλεκτρόνια, σύνολο 10. Το τελευταίο του ηλεκτρόνιο βρίσκεται επομένως στην τρίτη ηλεκτρονική στοιβάδα ($n = 3$) που είναι και η πιο εξωτερική. Εκεί, το φορτίο του πυρήνα προασπίζεται σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό από το αρνητικό φορτίο των 10 εσωτερικών ηλεκτρονίων. Το ηλεκτρόνιο αυτό χαρακτηρίζεται και σαν *οπτικά ενεργό ηλεκτρόνιο*, επειδή το οπτικό φάσμα των αλκαλίων οφείλεται στις μεταπτώσεις αυτού του ηλεκτρονίου.

Θα πρέπει να προσεχθεί ιδιαίτερα ότι, ενώ στο άτομο του υδρογόνου σε κάθε τιμή του n αντιστοιχεί μια μόνο ενέργεια, στο νάτριο, στην ίδια τιμή του n , αντιστοιχούν περισσότερες από μια ενέργειες λόγω της σύνθετης ηλεκτρονικής δομής του. Ο διαχωρισμός των ενεργειακών σταθμών σε περισσότερες υποστάθμες μπορεί να εξηγηθεί με την κβαντομηχανική. Επιλύοντας την ανεξάρτητη από τον χρόνο εξίσωση του Schrödinger:

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0 \quad (8.3)$$

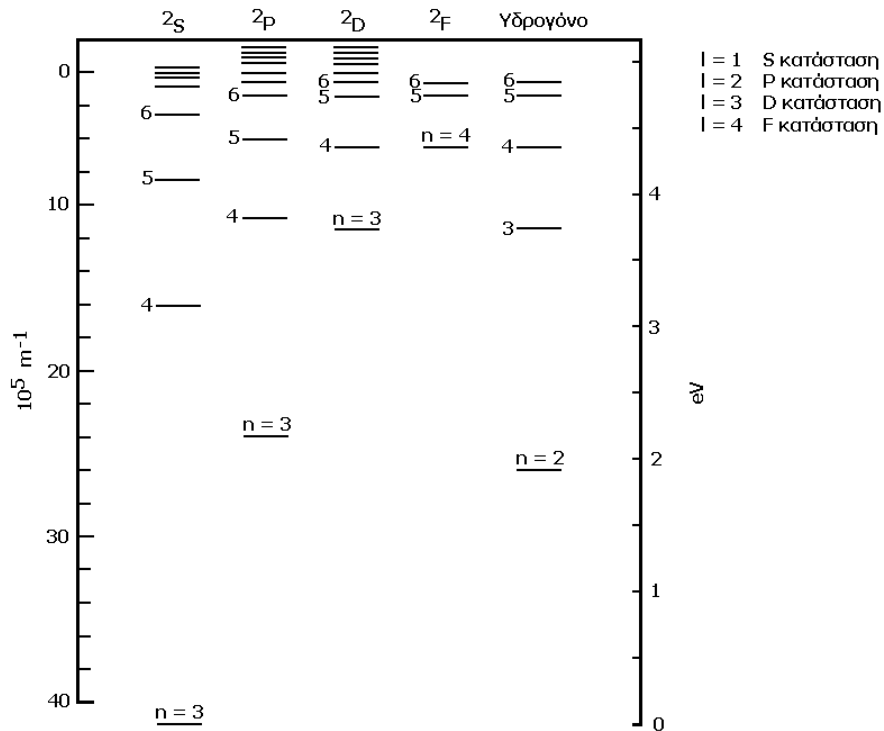
εισάγεται εκτός από τον κύριο κβαντικό αριθμό n και ο κβαντικός αριθμός της στροφορμής από περιφορά, l , για τις τιμές του οποίου ισχύει $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Όταν το ηλεκτρόνιο βλέπει ένα κεντρικό δυναμικό Coulomb, όπως στην περίπτωση των υδρογονοειδών ατόμων, όπου $V = -(Ze)/r$, τότε οι ιδιοτιμές της ενέργειας (οι λύσεις της εξίσωσης του Schrödinger) δίνονται από την σχέση:

$$E_n = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left[\frac{m_0 Z e^4}{2\hbar^2}\right] \frac{1}{n^2} \quad (8.4)$$

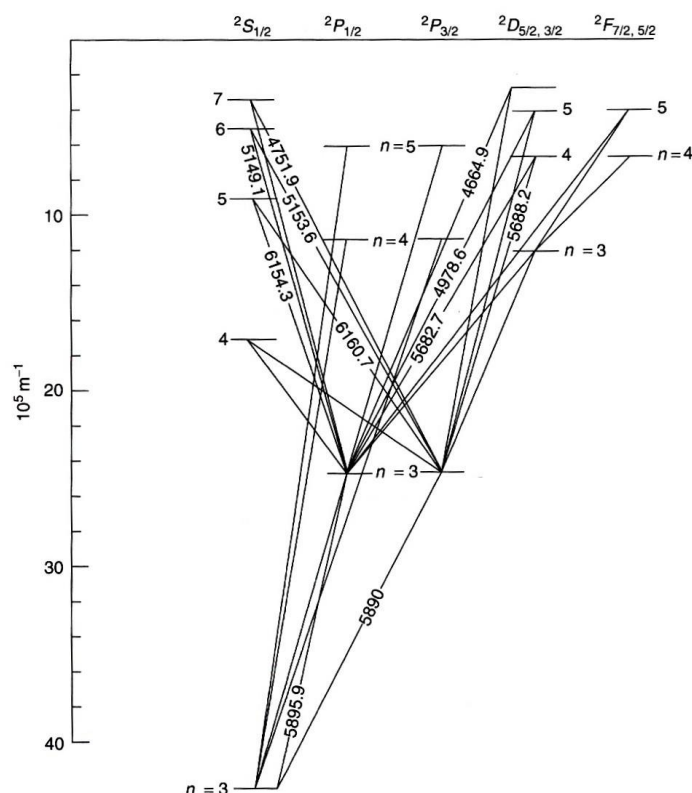
και είναι ανεξάρτητες του l . Η σχέση (8.4) για την περίπτωση του ατόμου του υδρογόνου (για $Z = 1$) καταλήγει στην σχέση (8.1), σε συμφωνία με την θεωρία του Bohr. Όμως, στην γενική περίπτωση (όπως και στο άτομο του νατρίου) το δυναμικό που βλέπει το ηλεκτρόνιο δεν είναι ένα απλό κεντρικό δυναμικό Coulomb και η ενέργεια της στάθμης εξαρτάται τόσο από τον κβαντικό αριθμό n όσο και από τον l . Οι ενεργειακές στάθμες μιας κατάστασης, λοιπόν, με δεδομένα n και l , συμβολίζονται σαν E_{nl} και όχι απλά σαν E_n .

Στο σχήμα 8.3 φαίνεται το ενεργειακό διάγραμμα των σταθμών του νατρίου, όπου οι ενεργειακές στάθμες είναι ομαδοποιημένες ως προς τον κβαντικό αριθμό l . Οι υποστάθμες συμβολίζονται σαν S, P, D, F, ..., για $l = 0, 1, 2, \dots$ αντίστοιχα, ενώ ο εκθέτης μπροστά από το σύμβολο της υποστοιβάδας δείχνει την πολλαπλότητα της κατάστασης. Η τελευταία στήλη στο σχήμα 8.3 δείχνει, για σύγκριση, τις ενεργειακές στάθμες του ατόμου του υδρογόνου. Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του l τόσο πιο κοντά είναι η στάθμη του ατόμου του νατρίου στην αντίστοιχη στάθμη του ατόμου του υδρογόνου. Επειδή για δεδομένο l , οι ενεργειακές στάθμες για διαφορετικές τιμές του n , ακολουθούν την ίδια συμπεριφορά με το άτομο του υδρογόνου, αλλά αντιστοιχούν σε διαφορετικό δραστικό φορτίο.



Σχήμα 8.3 Οι ενεργειακές στάθμες του ατόμου του νατρίου ομαδοποιημένες ως προς την στροφορμή λόγω περιφοράς (l). Η τελευταία στήλη δείχνει τις αντίστοιχες θέσεις των σταθμών του ατόμου του υδρογόνου. Ο αριστερός άξονας είναι σε 10^5 m^{-1} και το μηδέν αντιστοιχεί στο απλό ιονισμένο άτομο του νατρίου. Ο αριστερός άξονας είναι σε eV και το μηδέν αντιστοιχεί στην βασική κατάσταση του ατόμου του νατρίου.

Μπορούμε να θεωρήσουμε, σε πρώτη προσέγγιση, ότι το εξωτερικό ηλεκτρόνιο του ατόμου του νατρίου ($n = 3$) κινείται σε ένα σφαιρικά συμμετρικό δυναμικό, όπως και στο άτομο του υδρογόνου. Στην πραγματικότητα, το εξωτερικό ηλεκτρόνιο δεν βρίσκεται συνεχώς μακριά από τον πυρήνα, αλλά ανάλογα με την μορφή του τροχιακού του, πλησιάζει για ένα μέρος του χρόνου του και πολύ κοντά στον πυρήνα, εκεί όπου η προάσπιση των υπόλοιπων ηλεκτρονίων στο φορτίο του πυρήνα είναι περιορισμένη. Ηλεκτρόνια σε τροχίες με μικρές τιμές του κβαντικού αριθμού l πλησιάζουν τον πυρήνα με συνέπεια να έλκονται με μεγαλύτερη δύναμη από αυτόν, με αποτέλεσμα η ενέργειά τους να είναι μικρότερη (πιο αρνητική). Στην βασική κατάσταση του νατρίου, το εξωτερικό ηλεκτρόνιο (3S) έχει στροφορμή ίση με μηδέν, $l = 0$. Έτσι, ένα μεγάλο μέρος του χρόνου του τον δαπανά κοντά στον πυρήνα, μέσα στο νέφος που σχηματίζουν τα υπόλοιπα ηλεκτρόνια. Σε πρώτη προσέγγιση, το θετικό φορτίο του πυρήνα ($Ze = +11e$) και το αρνητικό φορτίο ($-10e$) των 10 εσωτερικών ηλεκτρονίων δίνουν συνολικό φορτίο $+e$. Άρα το εξωτερικό ηλεκτρόνιο 'αισθάνεται' την επίδραση ενός φορτίου που μπορεί να κυμαίνεται μεταξύ των ακραίων τιμών, από $Z = +1$ (όταν είναι πολύ μακριά από τον πυρήνα) ως $Z = +11$ (όταν είναι πολύ κοντά στον πυρήνα). Η μέση τιμή του φορτίου που αισθάνεται το ηλεκτρόνιο ορίζεται σαν το *δραστικό φορτίο*, Z_{eff} . Θα περίμενε λοιπόν κανείς ότι το φάσμα του νατρίου, το οποίο καθορίζεται από το εξωτερικό του ηλεκτρόνιο, θα είναι αντίστοιχο με το φάσμα του υδρογόνου, με μόνη διαφορά το φορτίο που για το υδρογόνο είναι $Z = 1$ και για το νάτριο είναι $Z = Z_{eff}$. Με αυτή την χοντρική προσέγγιση, μπορούμε να απλουστεύσου-



Σχήμα 8.4 Οι επιτρεπτές μεταπτώσεις μεταξύ των ενεργειακών σταθμών του ατόμου του νατρίου. Το μήκος κύματος των φωτονίων που προκύπτουν είναι σε \AA ($10 \text{\AA} = 1 \text{ nm}$). Η στάθμη P έχει χωριστεί, λόγω της λεπτής υφής, σε δύο στάθμες, τις $P_{1/2}$ και $P_{3/2}$, των οποίων οι ενέργειες είναι παραπλήσιες. Αυτό φαίνεται και από την πολύ μικρή διαφορά, μόνο $5,9 \text{\AA}$, στα μήκη κύματος των αντίστοιχων μεταπτώσεων στην βασική στάθμη $3S$ (γραμμή D του νατρίου).

με τις σχέσεις που περιγράφουν τις ενεργειακές καταστάσεις του νατρίου, ακολουθώντας τον φορμαλισμό του προτύπου του Bohr:

$$E_n = -13,6 \cdot Z_{eff}^2 \frac{1}{n^2} \quad (\text{eV}) \quad (8.5)$$

Το δραστικό φορτίο, επειδή είναι συνάρτηση των n και l , είναι διαφορετικό για κάθε συνδυασμό των n και l . Στο άτομο του νατρίου, το δραστικό φορτίο για τις στάθμες S παίρνει την τιμή $Z_{eff} \approx 11/9,6$, για τις στάθμες P την τιμή $Z_{eff} \approx 11/10,1$, για τις στάθμες D παίρνει την τιμή $Z_{eff} \approx 1$ και για τις στάθμες F παίρνει την τιμή $Z_{eff} \approx 1$.

Γ. Μεταπτώσεις μεταξύ των ενεργειακών σταθμών και κανόνες επιλογής

Όταν ένα άτομο βρίσκεται σε διεγερμένη κατάσταση, μπορεί να μεταπέσει στην βασική κατάσταση είτε απ' ευθείας, με μια μετάπτωση, είτε με διαδοχικές μεταπτώσεις σε ενδιάμεσες στάθμες. Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων οι μεταπτώσεις είναι ακτινοβολούσες, δηλαδή συνοδεύονται από την εκπομπή ενός φωτονίου, η ενέργεια του οποίου ισούται με την διαφορά των ενεργειών των δύο σταθμών:

$$h\nu = |E_f - E_i| \quad (8.6)$$

όπου E_f και E_i είναι οι ενέργειες της τελικής και της αρχικής κατάστασης της μετάπτωσης, αντίστοιχα.

Ο νόμος διατήρησης της στροφορμής και το γεγονός ότι ένα φωτόνιο έχει στροφορμή ίση με \hbar , επιβάλλουν κάποιους περιορισμούς στις μεταβολές των κβαντικών αριθμών σε μια μετάπτωση (κανόνες επιλογής). Για τον κύριο κβαντικό αριθμό δεν υφίσταται κανένας περιορισμός, δηλαδή ισχύει:

$$\Delta n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.7)$$

Για τον δευτερεύοντα κβαντικό αριθμό ισχύει ο κανόνας επιλογής:

$$\Delta l = \pm 1 \quad (8.8)$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα επιλογής $\Delta l = \pm 1$ στο διάγραμμα του σχήματος 8.3 λαμβάνουμε το διάγραμμα του σχήματος 8.4 όπου φαίνονται οι επιτρεπτές μεταπτώσεις στο άτομο του νατρίου με το μήκος κύματος της ακτινοβολίας σε \AA ($10 \text{\AA} = 1 \text{ nm}$). Με το δεδομένο ότι ο κβαντικός αριθμός l πρέπει να μεταβάλλεται κατά ± 1 , οι μεταπτώσεις γίνονται μεταξύ διαδοχικών στηλών και ποτέ στην ίδια στήλη.

Στο σχήμα 8.4 η στάθμη P έχει χωριστεί σε δύο υποστάθμες, τις $P_{1/2}$ και $P_{3/2}$ με ενέργειες παραπλήσιες λόγω της λεπτής υφής που θα εξηγηθεί παρακάτω. Ο δείκτης μετά το σύμβολο της υποστοιβάδας δείχνει τον κβαντικό αριθμό της ολικής στροφορμής του ηλεκτρονίου.

Χρησιμοποιώντας ένα φασματόμετρο μπορούμε να μελετήσουμε τις φασματικές γραμμές του νατρίου. Οι πιο έντονες γραμμές του νατρίου παρουσιάζονται στον πίνακα 8.1.

Πίνακας 8.1
Οι κυριότερες φασματικές γραμμές του νατρίου
στην ορατή περιοχή του φάσματος.

| Χρώμα | λ (nm) | | Μετάπτωση |
|---------------------|----------------|-------|---------------------|
| Κόκκινο | 615,4 | 616,1 | 5S \rightarrow 3P |
| Κίτρινο (γραμμές D) | 589,0 | 589,6 | 3P \rightarrow 3S |
| Πράσινο | 568,3 | 568,8 | 4D \rightarrow 3P |
| Πράσινο | 514,9 | 515,3 | 6S \rightarrow 3P |
| Μπλε – πράσινο | 497,9 | 498,3 | 5D \rightarrow 3P |
| Μπλε | 474,8 | 475,2 | 7S \rightarrow 3P |
| Μπλε | 466,5 | 466,9 | 6D \rightarrow 3P |
| Μπλε – ιώδες | 449,4 | 449,8 | 7D \rightarrow 3P |

Δ. Λεπτή υφή

Οι ενεργειακές στάθμες E_{nl} στην πραγματικότητα δεν είναι απλές, αλλά διαχωρίζονται σε ένα σύνολο πιο κοντινών υποσταθμών. Η παρατήρηση δείχνει ότι και

οι φασματικές γραμμές δεν είναι απλές, αλλά αποτελούνται από ένα σύνολο γραμμών με παραπλήσια μήκη κύματος. Αυτό ονομάζεται *λεπτή υφή* των φασματικών γραμμών. Στο υδρογόνο ο διαχωρισμός των γραμμών λόγω της λεπτής υφής είναι πολύ μικρός, της τάξης του 10^{-6} (10^{-2} nm). Για την παρατήρησή του απαιτούνται φασματομέτρα με πολύ υψηλή διακριτική ικανότητα. Όμως, για τα άτομα με πολλά ηλεκτρόνια η λεπτή υφή μπορεί να παρατηρηθεί πιο εύκολα, όπως θα εξηγηθεί παρακάτω.

Η ύπαρξη της λεπτής υφής αιτιολογήθηκε με την σχετικιστική κυματική εξίσωση του Dirac, η οποία εισάγει, εκτός από την τροχιακή στροφορμή του ηλεκτρονίου L που χαρακτηρίζεται από τον δευτερεύοντα κβαντικό αριθμό l , και την στροφορμή S λόγω του spin του ηλεκτρονίου που χαρακτηρίζεται από τον κβαντικό αριθμό του spin $s = 1/2$. Η ολική στροφορμή του ηλεκτρονίου είναι:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad (8.9)$$

και χαρακτηρίζεται από τον κβαντικό αριθμό j . Οι τιμές του j είναι:

$$j = l \pm s \quad (8.10)$$

Οι δύο διαφορετικές τιμές του j [σχέση (8.10)] αντιστοιχούν στους δύο διαφορετικούς προσανατολισμούς του spin ως προς την τροχιακή στροφορμή του ηλεκτρονίου. Στον ένα προσανατολισμό, τα δύο διανύσματα είναι παράλληλα, ενώ στον άλλο αντιπαράλληλα. Για τις καταστάσεις με $l = 0$ δεν τίθεται θέμα προσανατολισμού του spin και επομένως υπάρχει μια μοναδική τιμή της ολικής στροφορμής, $j = 1/2$. Αυτό, για παράδειγμα, συμβαίνει για το εξωτερικό ηλεκτρόνιο του ατόμου του νατρίου στην βασική κατάσταση $3S$.

Η σύζευξη των \vec{L} και \vec{S} , γνωστή και σαν *σύζευξη spin – τροχιάς*, εισάγει κάποια επιπρόσθετη δυναμική ενέργεια E_j , που μπορεί να είναι θετική ή αρνητική, αλλά πάντως μικρή σε σχέση με την αρχικά υπολογιζόμενη E_{nl} . Επειδή η ενέργεια E_j προστίθεται ή αφαιρείται στην E_{nl} (ανάλογα με τον σχετικό προσανατολισμό των δύο διανυσμάτων), οι δύο τιμές του j προφανώς οδηγούν σε δύο διαφορετικές τιμές της ολικής ενέργειας για κάθε κατάσταση. Έτσι, καταλήγουμε στον διπλασιασμό των ενεργειακών σταθμών και στην ύπαρξη της λεπτής υφής.

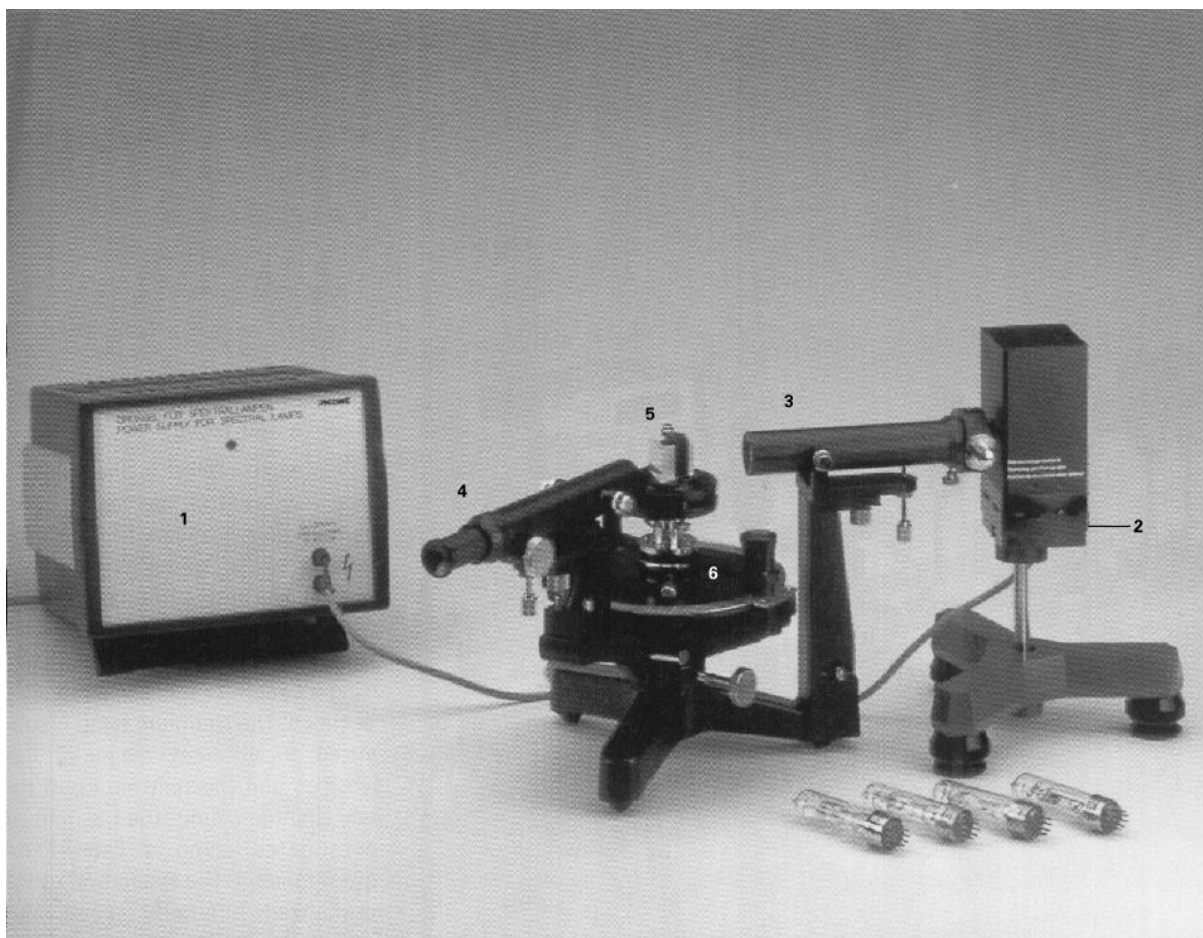
Προφανώς, στις καταστάσεις με $l = 0$ και άρα με μια μόνο τιμή για το j , δεν υπάρχει διπλασιασμός των ενεργειακών σταθμών. Στην πραγματικότητα, η λεπτή υφή όλων των παρατηρούμενων φασματικών γραμμών του νατρίου οφείλεται κυρίως στην λεπτή υφή της στάθμης $3P$ ($n = 3, l = 1$), με $j = 1/2$ και $j = 3/2$ (οι στάθμες αναφέρονται σαν $3P_{1/2}$ και $3P_{3/2}$, αντίστοιχα), σχήμα 8.4.

Η διαφορά αυτή φαίνεται χαρακτηριστικά στην περίπτωση της κίτρινης γραμμής του νατρίου (γραμμή D), που είναι διπλή. Οι δύο επιμέρους γραμμές που αποτελούν την λεπτή υφή της γραμμής, έχει καθιερωθεί να ονομάζονται γραμμή D_1 και γραμμή D_2 του νατρίου.

Η γραμμή D_1 με $\lambda = 589,6$ nm οφείλεται στην μετάπτωση $3P_{1/2} \rightarrow 3S_{1/2}$, δηλαδή από την κατάσταση $n = 3, l = 1, j = 1/2$ στην κατάσταση $n = 3, l = 0, j = 1/2$.

Η γραμμή D_2 με $\lambda = 589,0$ nm οφείλεται στην μετάπτωση $3P_{3/2} \rightarrow 3S_{1/2}$, δηλαδή από την κατάσταση $n = 3, l = 1, j = 3/2$ στην κατάσταση $n = 3, l = 0, j = 1/2$.

Η λεπτή υφή στις φασματικές γραμμές του ατόμου του νατρίου και γενικότερα των ατόμων των αλκαλίων, μπορεί να παρατηρηθεί εύκολα ακόμη και με σχετικά α-



Σχήμα 8.5 Τα κύρια μέρη της πειραματικής διάταξης της άσκησης. 1) Τροφοδοτικό της λυχνίας, 2) Υποδοχέας – βάση της λυχνίας, 3) Διόπτρα φωτισμού, 4) Διόπτρα παρατήρησης, 5) Πρίσμα ή φράγμα περίθλασης, 6) Βαθμολογημένος γωνιομετρικός δακτύλιος με βερνιέρο.

πλά φασματόμετρα, λόγω του ικανοποιητικού ενεργειακού διαχωρισμού (της τάξης του 10^{-3}).

II. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από φασματικές λυχνίες με τα τροφοδοτικά τους, μια γωνιομετρική τράπεζα και ένα σύστημα ανάλυσης οπτικών φασμάτων, σχήμα 8.5.

Η γωνιομετρική τράπεζα αποτελείται από δυο διόπτρες και από έναν γωνιομετρικό δακτύλιο που είναι βαθμολογημένος σε μοίρες για την μέτρηση των γωνιών.

Η μια διόπτρα, διόπτρα φωτισμού, περιλαμβάνει συστήματα για την ρύθμιση σε ύψος και πάχος της δέσμης του φωτός καθώς και φακούς για την εστίαση της φωτεινής δέσμης. Η δεύτερη διόπτρα, διόπτρα παρατήρησης, περιλαμβάνει ένα προσοφθάλμιο σύστημα φακών με μικρομετρική κλίμακα στο εσωτερικό του. Οι δύο βραχίονες περιστρέφονται γύρω από έναν κοινό άξονα περιστροφής όπου τοποθετείται το σύστημα ανάλυσης των οπτικών φασμάτων. Μαζί με τον δεύτερο βραχίονα κινείται και ένας βερνιέρος για την ακριβή μέτρηση των γωνιών. Η κλίμακα του βερνιέρου αντιστοιχεί σε μισή μοίρα και φέρει 30 υποδιαίρεσεις. Έτσι, η ακρίβεια της ανάγνωσης της γωνίας είναι ίση με $\pm 1'$. Για τον τρόπο χρήσης του βερνιέρου βλέπε στην σελίδα 18.

Παράδειγμα: Έστω ότι το μηδέν του βερνιέρου βρίσκεται μεταξύ των ενδείξεων $12,5^0$ και $13,0^0$. Η ένδειξη της βασικής κλίμακας είναι $12,50^0$. Αν η 22η υποδιαίρεση του βερνιέρου ευθυγραμμίζεται με μια από τις υποδιαίρεσεις της βασικής κλίμακας, τότε η ένδειξη του βερνιέρου είναι $22'$. Η μέτρηση της γωνίας είναι το άθροισμα των ενδείξεων της βασικής κλίμακας και του βερνιέρου: $12,50^0 (12^0 30') + 22' = 12^0 52'$.

Το σύστημα ανάλυσης των οπτικών φασμάτων μπορεί να είναι ένα πρίσμα ή ένα φράγμα περίθλασης.

Η λειτουργία του πρίσματος βασίζεται στο γεγονός ότι ο δείκτης διάθλασης του υλικού του πρίσματος εξαρτάται από την μήκος κύματος της ακτινοβολίας (αυξάνεται με την αύξηση του μήκους κύματος). Όταν στο πρίσμα προσπέσει φωτεινή ακτινοβολία μεικτού φάσματος, η γωνία εξόδου των διαφόρων συνιστωσών του φάσματος είναι διαφορετική. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το φάσμα να αναλύεται στις συνιστώσες του.

Το φράγμα περίθλασης είναι ένα διαφανές γυάλινο πλακίδιο που έχει χαραγμένες πολλές παράλληλες σκοτεινές (μη διαπερατές από το φως) γραμμές. Μεταξύ των σκοτεινών γραμμών παρεμβάλλονται φωτεινές (διαπερατές από το φως) περιοχές. Η απόσταση μεταξύ δύο φωτεινών ή δύο σκοτεινών περιοχών είναι σταθερή και ονομάζεται σταθερά του φράγματος a . Στο πείραμά μας χρησιμοποιούμε φράγμα περίθλασης με 600 γραμμές/mm, άρα:

$$a = \frac{1}{600 \text{ mm}^{-1}} = 1667 \text{ nm}$$

Όταν στο φράγμα προσπέσει μονοχρωματική ακτινοβολία μήκους κύματος λ , οι φωτεινές περιοχές καθίστανται δευτερογενείς πηγές σύμφωνου φωτός (ίδιου με το προσπίπτον φως). Το φως από όλες αυτές τις δευτερογενείς πηγές φωτός συμβάλλει, με αποτέλεσμα να σχηματιστούν κροσσοί συμβολής (μέγιστα και ελάχιστα της έντασης του φωτός). Η συνθήκη συμβολής απαιτεί η διαφορά πορείας των φωτεινών δεσμών από κάθε φωτεινή περιοχή να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας. Αυτό ικανοποιείται για ορισμένες τιμές της γωνίας θ για τις οποίες ισχύει:

$$a \sin \theta = m \lambda \quad (8.11)$$

όπου m είναι ένας ακέραιος αριθμός που λαμβάνει τιμές $m = 1, 2, 3, \dots$. Οι κροσσοί για $m = 1$ ονομάζονται κροσσοί πρώτης τάξης, για $m = 2$ δευτέρας τάξης κ.ο.κ..

Όταν στο φράγμα περίθλασης προσπέσει φωτεινή ακτινοβολία μεικτού φάσματος, τότε, σύμφωνα με την σχέση (8.11), κάθε συνιστώσα θα συμβάλει σε διαφορετική γωνία θ . Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το φάσμα να αναλύεται στις συνιστώσες του. Επειδή η ένταση των γραμμών μειώνεται καθώς αυξάνει η τάξη των κροσσών, η μέλητη του φάσματος γίνεται καλύτερα με την βοήθεια των κροσσών πρώτης τάξης.

Η πειραματική εργασία περιλαμβάνει:

1. Την βαθμολόγηση του φασματομέτρου.
2. Την μέτρηση των φασματικών γραμμών του νατρίου.
3. Την μέτρηση της λεπτής υφής της γραμμής D του φάσματος του νατρίου.

A. Βαθμολόγηση του φασματόμετρου

Για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε το μήκος κύματος μιας ακτινοβολίας πρέπει να βαθμολογήσουμε το σύστημα φασματοσκοπίας, δηλαδή να βρούμε την σχέση μεταξύ του μήκους κύματος και της γωνίας θ στην σχέση (8.11). Αυτό γίνεται μελετώντας το φάσμα κάποιου στοιχείου του οποίου το φάσμα γνωρίζουμε με μεγάλη ακρίβεια. Στην άσκηση αυτή σαν τέτοιο υλικό χρησιμοποιούμε το ουδέτερο ήλιο. Στον πίνακα 8.2 παρουσιάζονται οι κύριες φασματικές γραμμές του ηλίου που βρίσκονται στην περιοχή του ορατού. Γνωρίζοντας το μήκος κύματος λ και μετρώντας την γωνία θ που εμφανίζονται οι διάφορες φασματικές γραμμές μπορούμε να προσδιορίσουμε, με την βοήθεια των ελαχίστων τετραγώνων, την πειραματική τιμή της σταθεράς του φράγματος περίθλασης, a , σχέσης (8.11).

Πίνακας 8.2

Οι κυριότερες φασματικές γραμμές του ουδέτερου ηλίου στην ορατή περιοχή του φάσματος.

| Χρώμα | λ (nm) | Μετάπτωση |
|----------------|----------------|-------------------------|
| Κόκκινο | 667,8 | $3^1D \rightarrow 2^1P$ |
| Κίτρινο | 587,6 | $3^3D \rightarrow 2^3P$ |
| Πράσινο | 501,6 | $3^1P \rightarrow 2^1S$ |
| Μπλε – πράσινο | 492,2 | $4^1D \rightarrow 2^1P$ |
| Μπλε | 471,3 | $4^3S \rightarrow 2^3P$ |
| Ιώδες | 447,2 | $4^3D \rightarrow 2^3P$ |

B. Μελέτη των φασματικών γραμμών του νατρίου

Αντικαθιστούμε την λυχνία του ηλίου με την λυχνία του νατρίου και μετράμε την γωνία θ στην οποία παρατηρούμε κάθε γραμμή. Γνωρίζοντας την καμπύλη βαθμολογίας, σχέση (8.11), μπορούμε να βρούμε το μήκος κύματος κάθε γραμμής και, με την βοήθεια του σχήματος 8.4 και του πίνακα 8.1, μπορούμε να προσδιορίσουμε την αντίστοιχη μετάπτωση.

Γ. Λεπτή υφή της γραμμής D του νατρίου

Για να παρατηρήσουμε την λεπτή υφή της γραμμής D του νατρίου πρέπει να διαθέτουμε ένα φασματόμετρο με καλή διακριτική ικανότητα, δηλαδή ο διαχωρισμός των δύο γραμμών να είναι μεγαλύτερος από το σφάλμα της μέτρησης. Με το φράγμα περίθλασης που διατίθεται είναι δύσκολη η μέτρηση του διαχωρισμού των δύο γραμμών από τους κροσσούς πρώτης τάξης γιατί είναι περίπου ίσος με το σφάλμα της μέτρησης. Αυτό μπορεί να γίνει ευκολότερα χρησιμοποιώντας τους κροσσούς δευτέρας τάξης ($m = 2$). Μετρώντας τις γωνίες θ_1 και θ_2 που αντιστοιχούν στις δύο συνιστώσες της γραμμής, με την βοήθεια της γνωστής πλέον σχέσης (8.11), υπολογίζουμε το μήκος κύματος των δύο γραμμών.

III. ΟΡΓΑΝΑ

1. Γωνιομετρική τράπεζα.
2. Πρίσμα.
3. Φράγμα περίθλασης.
4. Φασματικές λυχνίες ηλίου και νατρίου.
5. Τροφοδοτικό φασματικών λυχνιών.

IV. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

A. Αναγνώριση των οργάνων, ρυθμίσεις

1. Αναγνωρίστε τις συσκευές.
2. Μπροστά από την διόπτρα φωτισμού τοποθετούμε κάποια πηγή φωτός. Παρατηρώντας την έξοδο της φωτεινής δέσμης ρυθμίζουμε το ύψος και το εύρος της ώστε να έχουμε μια λεπτή φωτεινή γραμμή
3. Στρέφουμε την διόπτρα παρατήρησης προς κάποια φωτισμένη επιφάνεια. Παρατηρούμε την εσωτερική κλίμακα και το σταυρόνημα και φροντίζουμε ώστε να φαίνονται καθαρά και η κλίμακα να είναι οριζόντια ρυθμίζοντας την εστίαση του προσοφθάλμιου φακού.
4. Χωρίς να παρεμβάλετε το πρίσμα ή το φράγμα, παρατηρείστε την σχισμή της διόπτρας φωτισμού. Περιστρέψτε την διόπτρα παρατήρησης ώστε η φωτεινή γραμμή να βρίσκεται στο κέντρο του σταυρονήματος.
5. Λάβετε την ένδειξη της γωνίας, η οποία πρέπει να είναι κοντά στο μηδέν. Αν η γωνία είναι πάνω από μισή μοίρα, καλέστε τον υπεύθυνο της άσκησης για να κάνει νέα ρύθμιση. Αν η γωνία είναι μικρή σημειώστε την σαν μετατόπιση του μηδενός. Την γωνία αυτή την αφαιρείτε από τις μετρήσεις μας αν είναι θετική, ή την προσθέτετε αν είναι αρνητική.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Οι υποδιαίρεσεις της γωνιομετρικής τράπεζας είναι ανά μισή μοίρα. Η κλίμακα του βερνιέρου έχει 30 υποδιαίρεσεις και αντιστοιχεί, όπως είναι γνωστό, σε γωνία ίση με μια μικρή υποδιαίρεση της κλίμακας της γωνιομετρικής τράπεζας. Κάθε υποδιαίρεση του βερνιέρου αντιστοιχεί σε γωνία ίση με 1 λεπτό της μοίρας ($= 1/60 = 0,0167^{\circ}$).

B. Παρατήρηση ενός συνεχούς και ενός γραμμικού φάσματος

1. Τοποθετείστε με προσοχή το πρίσμα στην κατάλληλη θέση της γωνιομετρικής τράπεζας.
2. Τοποθετείστε μπροστά από την σχισμή της διόπτρας φωτισμού μια λυχνία πυρακτώσεως.
3. Παρατηρώντας από την διόπτρα παρατήρησης, στρέψτε την σιγά – σιγά μέχρι να δείτε το φάσμα του φωτός της λυχνίας πυρακτώσεως. Πως είναι το φάσμα που βλέπετε; Ποιά είναι η διαδοχή των χρωμάτων; Ποιό χρώμα διαθλάται σε μεγαλύτερη γωνία; Γιατί;
4. Αντικαταστήστε την λυχνία πυρακτώσεως με μια από τις φασματικές λυχνίες που έχετε.

5. Παρατηρώντας από την διόπτρα παρατήρησης, στρέψτε την σιγά – σιγά μέχρι να δείτε το φάσμα του φωτός του αερίου της φασματικής λυχνίας. Πως είναι το φάσμα που βλέπετε;
6. Συγκρίνετε και σχολιάστε τα φάσματα που παρατηρήσατε. Που οφείλονται οι διαφορές τους;

Γ. Μελέτη του φάσματος του νατρίου με φράγμα περίθλασης

1. Τοποθετείστε με προσοχή το φράγμα περίθλασης στην κατάλληλη θέση της γωνιομετρικής τράπεζας.
2. Τοποθετείστε μπροστά από την σχισμή της διόπτρας φωτισμού την λυχνία του ηλίου.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Μην πιάνετε τις φασματικές λυχνίες με γυμνό χέρι αλλά με την βοήθεια του ειδικού πανιού. Αν τις πιάσετε με το χέρι υπάρχει κίνδυνος να καταστραφούν. Αν η λυχνία δεν βρίσκεται στην θέση της καλέστε τον υπεύθυνο της άσκησης να την τοποθετήσει. Μην προσπαθήσετε να το κάνετε μόνοι σας.

3. Παρατηρώντας από την διόπτρα παρατήρησης, στρέψτε την σιγά – σιγά μέχρι να δείτε το φάσμα του φωτός του αερίου της φασματικής λυχνίας.
4. Αναγνωρίστε κάθε φασματική γραμμή που παρατηρείτε και ταυτοποιήστε την με την βοήθεια του πίνακα 8.2.
5. Σκοπεύστε με το σταυρόνημα μια – μια τις φασματικές γραμμές. Μετρήστε την γωνία στην οποία παρουσιάζονται. Εκτιμήστε το σφάλμα της μέτρησης.
6. Σχεδιάστε την καμπύλη του ημθ σε συνάρτηση με το μήκος κύματος λ . Ποιά είναι η μορφή της καμπύλης;
7. Με την βοήθεια των ελαχίστων τετραγώνων υπολογίστε τις παραμέτρους της καλύτερης ευθείας που διέρχεται από τα πειραματικά σας δεδομένα. Πόση είναι η σταθερά του φράγματος; Πόσο είναι το σφάλμα της;
8. Αντικαταστήστε την λυχνία του ηλίου με την λυχνία του νατρίου.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Μην πιάνετε τις φασματικές λυχνίες με γυμνό χέρι αλλά με την βοήθεια του ειδικού πανιού. Αν τις πιάσετε με το χέρι υπάρχει κίνδυνος να καταστραφούν. Αν η λυχνία δεν βρίσκεται στην θέση της καλέστε τον υπεύθυνο της άσκησης να την τοποθετήσει. Μην προσπαθήσετε να το κάνετε μόνοι σας.

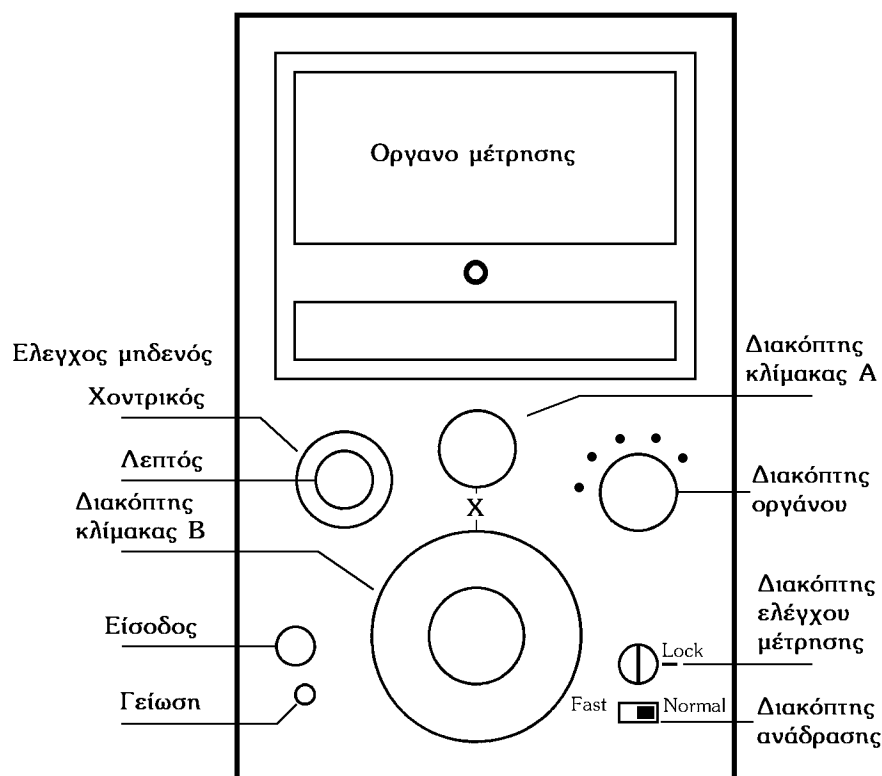
9. Για κάθε γραμμή του φάσματος μετρήστε την γωνία στην οποία την παρατηρείτε. Υπολογίστε το μήκος κύματος και την ενέργεια της γραμμής σε eV. Πόσο είναι το σφάλμα τους;
10. Με την βοήθεια του πίνακα 8.1 και του σχήματος 8.4, ταυτοποιήστε όσες γραμμές μπορείτε. Ποιες είναι οι αρχικές και ποιες οι τελικές τιμές των κβαντικών αριθμών n , l και j σε κάθε μετάπτωση;

90 Μελέτη των κβαντικών μεταπτώσεων στο άτομο του Na

11. Θεωρώντας ότι $Z_{eff} = 1$, υπολογίστε τις ενέργειες των φωτονίων που αναμένονται από τις αντίστοιχες μεταπτώσεις. Συγκρίνετε τις τιμές αυτές με τις πειραματικές σας τιμές. Εξηγήστε γιατί οι θεωρητικές τιμές δεν συμφωνούν με τις πειραματικές.
12. Βρείτε και παρατηρήστε το φάσμα περίθλασης δευτέρας τάξης ($m = 2$). Βρείτε την γραμμή D του νατρίου.
13. Μετρήστε τις γωνίες κάθε συνιστώσας της γραμμής.
14. Υπολογίστε το μήκος κύματος, την ενέργειά τους και τον διαχωρισμό των γραμμών Δl και ΔE .
15. Σχόλια, συμπεράσματα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1 ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΟΜΕΤΡΟ 610 C ΤΗΣ KEITHLEY

Το ηλεκτρόμετρο είναι ένα ευαίσθητο όργανο με το οποίο μπορούμε να μετρήσουμε τουλάχιστον ρεύματα χαμηλής έντασης. Διαφέρει από το γαλβανόμετρο στο ότι το μεν γαλβανόμετρο είναι ένα παθητικό όργανο, το δε ηλεκτρόμετρο ένα ενεργητικό, δηλαδή ενισχύει το προς μέτρηση σήμα και μετρά το ενισχυμένο σήμα. Στο σχήμα Π1.1 παρουσιάζεται η εμπρόσθια όψη του ηλεκτρόμετρου της άσκησης.



Σχήμα Π1.1 Σχηματική παράσταση της εμπρόσθιας όψης του ηλεκτρόμετρου 610 C της Keithley.

Ο διακόπτης οργάνου είναι ένας πενταθέσιος διακόπτης με τις ενδείξεις POWER OFF, OFF, +, – και CENTER ZERO. Όταν ο διακόπτης αυτός είναι στην θέση POWER OFF το όργανο δεν τροφοδοτείται. Στην θέση OFF το όργανο τροφοδοτείται αλλά δεν είναι έτοιμο για μέτρηση. Στις υπόλοιπες θέσεις το όργανο είναι έτοιμο για μέτρηση.

Ο διακόπτης ελέγχου της μέτρησης συνδέει ή αποσυνδέει το προς μέτρηση σήμα με το όργανο. Στην θέση LOCK το σήμα εισόδου δεν συνδέεται με το όργανο. Η θέση αυτή χρησιμοποιείται για τον έλεγχο του μηδενός και για την προστασία του οργάνου, όταν π.χ. ανοίγουμε το σκέπασμα του φωτοστεγούς κιβωτίου στην άσκηση 1.

Ο έλεγχος του μηδενός γίνεται με τον διακόπτη ελέγχου του μηδενός. Αυτός αποτελείται από έναν διακόπτη για την χοντρική ρύθμιση του μηδενός και από ένα ποτενσιόμετρο για την λεπτή ρύθμιση. Για να γίνει η ρύθμιση του μηδενός, ο διακόπτης ελέγχου της μέτρησης πρέπει να βρίσκεται στην θέση LOCK.

Ο διακόπτης κλίμακας B καθορίζει το τι θα μετρήσει το όργανο και την τάξη μεγέθους του σήματος. Το ηλεκτρόμετρο μπορεί να μετρήσει τάση, ένταση ρεύματος, φορτίο και αντίσταση. Η πραγματική κλίμακα της μέτρησης είναι το γινόμενο των ενδείξεων του διακόπτη κλίμακας A και του διακόπτη κλίμακας B.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Αλλαγή της θέσης του διακόπτη κλίμακας B σημαίνει αλλαγή της εσωτερικής αντίστασης του οργάνου. Μετρήσεις που ελήφθησαν με διαφορετικές θέσεις του διακόπτη αυτού δεν έχουν εσωτερική συνοχή.

Ο διακόπτης ανάδρασης καθορίζει την ταχύτητα απόκρισης του οργάνου. Για μέτρηση φορτίου πρέπει να είναι στην θέση FAST. Για οποιαδήποτε άλλη μέτρηση πρέπει να είναι στην θέση NORMAL.

Προδιαγραφές.

Σαν βολτόμετρο:

Περιοχή: 0,001 – 100 volts full scale σε 11 κλίμακες.

Ακρίβεια: $\pm 1\%$ της μέγιστης τιμής της κλίμακας.

Μετατόπιση μηδενός: $< 1 \text{ mV}$ ανά 24ώρο, $< 150 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$ μετά από λειτουργία 30 min.

Θόρυβος οργάνου: $\pm 25 \mu\text{V}$ με βραχυκυκλωμένη την είσοδο και στην πιο ευαίσθητη κλίμακα.

Αντίσταση εισόδου: $> 10^{14} \Omega$.

Χωρητικότητα εισόδου: 20 pF.

Σαν Αμπερόμετρο:

Περιοχή: 10^{-14} – 0,3 A full scale σε 28 κλίμακες.

Ακρίβεια: $\pm 2\%$ της μέγιστης τιμής της κλίμακας, για τις κλίμακες $0,3 \times 10^{-11}$ – 0,3 A. Στις υπόλοιπες κλίμακες $\pm 4\%$.

Θόρυβος οργάνου: $< 3 \times 10^{-15}$ A.

Σαν ωμόμετρο:

Περιοχή: 100 – $10^{14} \Omega$ full scale σε 25 κλίμακες.

Ακρίβεια: $\pm 3\%$ της μέγιστης τιμής της κλίμακας για τις κλίμακες $100 - 10^{10} \Omega$.
 $\pm 5\%$ στις μεγαλύτερες κλίμακες.

Σαν κουλόμπμετρο:

Περιοχή: $10^{-13} - 10^{-5} \text{ C}$ full scale σε 17 κλίμακες.

Ακρίβεια: $\pm 5\%$ της μέγιστης τιμής της κλίμακας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

ΦΥΣΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

Οι τιμές των φυσικών σταθερών έχουν ληφθεί από το Review of Particle Properties που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό *Physics Letter B (Review of Particle Physics)* vol. **592**, 1 – 4, July 2004. Οι αριθμοί στην παρένθεση, μετά την τιμή της σταθεράς, δίνουν την ανακρίβεια, \pm μια σπάνταρ απόκλιση, στα τελευταία ψηφία.

| Σταθερά | Σύμβολο – σχέση | Τιμή |
|--|--|--|
| Ταχύτητα του φωτός στο κενό | c | 299792458 m/s * |
| Σταθερά του Plank | h | 6,6260693(11) $\times 10^{-34}$ J·s |
| Σταθερά του Planck, ανηγμένη | \hbar | 1,05457168(18) $\times 10^{-34}$ J·s 6,58211915(56) $\times 10^{-22}$ MeV·s |
| Φορτίο ηλεκτρονίου | e | 1,60217653(14) $\times 10^{-19}$ C 4,80320441(41) $\times 10^{-10}$ esu |
| Μάζα ηλεκτρονίου | m_e | 0,510998918(44) MeV/c ² 9,1093826(1654) $\times 10^{-31}$ kg |
| Μάζα πρωτονίου | m_p | 938,272029(80) MeV/c ² 1,67262171(29) $\times 10^{-27}$ kg 1,00727646688(13) amu 1836,15267261(85) m_e |
| 1 amu | Μάζα ατόμου ¹² C / 12 = 1 g/N _A | 931,494043(80) MeV/c ² 1,66053886(28) $\times 10^{-27}$ kg |
| Σταθερά της λεπτής υφής | $\alpha = e^2 / 4\pi\epsilon_0\hbar c$ | 1/137,03599911(46) |
| Κλασική ακτίνα του ηλεκτρονίου | $r_e = e^2 / 4\pi\epsilon_0 m_e c^2$ | 2,817940325(28) $\times 10^{-15}$ m |
| Μήκος κύματος Compton | $\lambda_e = \hbar / m_e c = r_e / \alpha$ | 3,861592678(26) $\times 10^{-13}$ m |
| Ακτίνα Bohr ($m_{\text{πυρήνα}} = \infty$) | $r_\infty = 4\pi\epsilon_0\hbar^2 / m_e e^2 = r_e \alpha^{-2}$ | 0,5291772108(18) $\times 10^{-10}$ m |
| Αριθμός Avogadro | N_A | 6,0221415(10) $\times 10^{23}$ mol ⁻¹ |
| Σταθερά Boltzmann | k | 1,3806505(24) $\times 10^{-23}$ J/K 8,617343(15) $\times 10^{-5}$ eV/K |
| Ενέργεια Rydberg | $hcR_\infty = m_e c^2 \alpha^2 / 2$ | 13,6056923(12) eV |

* Το μέτρο ορίζεται σαν η απόσταση που διανύει το φως σε 1/299792458 s. Βλέπε S. M. Petley, *Nature* **303**, 373 (1983).