

ΑΣΚΗΣΗ 6

ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ

Σκοπός της άσκησης είναι η ανάδειξη της κυματικής φύσης των ηλεκτρονίων.

Ι. ΘΕΩΡΙΑ

Το 1920 ήταν γνωστό ότι το φως, εκτός από την κυματική του φύση, είχε και σωματιδιακή (ερμηνεία της εκπομπής του μέλανος σώματος από τον Planck το 1900, ερμηνεία του φωτοηλεκτρικού φαινομένου από τον Einstein το 1905, ερμηνεία του φαινομένου Compton το 1920). Το 1924 ο Louis de Broglie πρότεινε ότι και *τα κινούμενα ηλεκτρόνια (και γενικά κάθε κινούμενο σωματίδιο) έχουν, εκτός από την σωματιδιακή φύση και κυματική φύση*. Η πρόταση αυτή επαληθεύτηκε με το πείραμα των Davisson – Germer το 1925. Το 1931 οι Esterman, Frisch και Stern απέδειξαν πειραματικά την κυματική φύση των ουδέτερων σωματιδίων. Στα επόμενα χρόνια αποδείχθηκε η κυματική φύση των νετρονίων.

Ο Louis de Broglie, κατ' αναλογία των φωτονίων όπου η ορμή τους είναι $p = h/\lambda$, πρότεινε επίσης ότι το μήκος κύματος των κινούμενων σωματιδίων δίνεται από την σχέση:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (6.1)$$

όπου h είναι η σταθερά του Planck και p η ορμή των ηλεκτρονίων. Αυτό βέβαια με την προϋπόθεση ότι η ταχύτητα των ηλεκτρονίων είναι μικρή ώστε να μην απαιτούνται διορθώσεις από την θεωρία της σχετικότητας. Αν η ταχύτητα των ηλεκτρονίων είναι μεγάλη, ενέργεια των ηλεκτρονίων μεγαλύτερη από 10 keV, τότε το μήκος κύματος δίνεται από την σχέση:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0T} \left(1 + \frac{T}{2m_0c^2}\right)^{1/2}} \quad (6.2)$$

όπου T είναι η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων και m_0 η μάζα ηρεμίας τους.

Συνήθως τα ηλεκτρόνια τα παράγουμε από ένα θερμαινόμενο νήμα και στην συνέχεια τα επιταχύνουμε με μιά διαφορά δυναμικού V . Στην περίπτωση αυτή η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων δίνεται από την σχέση:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = eV \quad (6.3)$$

Αντικατάσταση της p στην σχέση (6.1) δίνει:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2emV}} \quad (6.4)$$

Με αντικατάσταση των τιμών της σταθεράς του Planck ($h = 4,135 \times 10^{-21} \text{ MeV} \cdot \text{s}$), της μάζας του ηλεκτρονίου ($m = 0,5110 \text{ MeV}/c^2$) και του φορτίου του ηλεκτρονίου ($e = 1,6022 \times 10^{-19} \text{ C}$), η σχέση (6.4) γίνεται:

$$\lambda(X) = \frac{12,26}{\sqrt{V \text{ (volts)}}} \quad (6.5)$$

Εφαρμογή: Για τάση επιτάχυνσης $V = 5 \text{ kV}$ το μήκος κύματος των ηλεκτρονίων, όπως προκύπτει από την σχέση (6.5), είναι $\lambda = 0,1734 \text{ \AA}$.

Για να αναδείξουμε την κυματική φύση των ηλεκτρονίων πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποιο φαινόμενο που συμβαίνει στα κύματα. Σαν τέτοιο φαινόμενο χρησιμοποιούμε την περίθλαση. Όπως είναι γνωστό από την κυματική, για να γίνει η περίθλαση θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποιο φράγμα περίθλασης με σταθερά φράγματος της τάξης μεγέθους του μήκους κύματος. Επειδή το μήκος κύματος των κινούμενων ηλεκτρονίων είναι της τάξης μεγέθους του \AA , το φράγμα περίθλασης που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε θα πρέπει να έχει σταθερά της ίδιας τάξης μεγέθους. Τέτοια φράγματα περίθλασης είναι οι κρύσταλλοι.

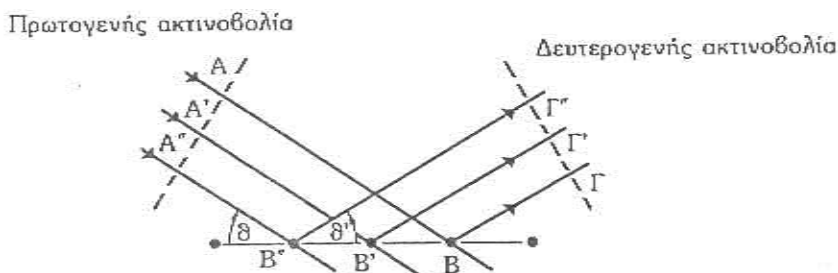
Ένας κρύσταλλος δεν είναι τίποτε άλλο από την περιοδική επανάληψη κάποιας στοιχειώδους μονάδας, της *κρυσταλλικής κυψελίδας*, στις τρεις διαστάσεις. Η απόσταση των ατόμων σε έναν κρύσταλλο είναι της τάξης μεγέθους του \AA . Τα άτομα των κρυστάλλων, λόγω της συμμετρίας του κρυστάλλου, σχηματίζουν ομάδες παραλλήλων και ισαπεχόντων επιπέδων (*δικτυωτά επίπεδα*). Ο αριθμός και ο προσανατολισμός αυτών των επιπέδων εξαρτάται από την δομή της κρυσταλλικής κυψελίδας.

Πριν από την ανάδειξη της κυματικής φύσης των κινούμενων σωματιδίων, η μελέτη των κρυστάλλων γινόταν μόνο με τις ακτίνες X . Οι νόμοι που ισχύουν για την περίθλαση των ακτίνων X θα ισχύουν και για την περίθλαση των ηλεκτρονίων (και γενικά κάθε κινούμενου σωματιδίου).

II. ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ ΤΩΝ ΑΚΤΙΝΩΝ X

Όταν ακτίνες X προσπίπτουν σε ένα άτομο, το άτομο ταλαντώνεται σε φάση με την προσπίπτουσα ακτινοβολία. Από την ταλάντωση εκπέμπεται ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία του ίδιου μήκους κύματος με την προσπίπτουσα και σε φάση μ' αυτήν.

Ας θεωρήσουμε ότι μιά παράλληλη δέσμη ακτίνων X μήκους κύματος λ προσπίπτει σε ένα δικτυωτό επίπεδο με γωνία πρόσπτωσης θ . Η ακτινοβολία που εκπέμπεται από τα άτομα του δικτυωτού επιπέδου συμβάλλει. Το αποτέλεσμα της συμβολής προκύπτει με την μέθοδο των ισοφασικών σφαιρών του Huygens. Η δευτερογε-



Σχήμα 6.1 Πρόσπτωση των ακτίνων X σε ένα δικτυωτό επίπεδο. Ανοικοδομητική συμβολή έχουμε μόνον όταν $\theta = \theta'$.

νής ακτινοβολία συμβάλλει ανοικοδομητικά σε ορισμένη κατεύθυνση, εκεί όπου οι διαφορές πορείας $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$, $A''B''\Gamma''$ κ.λπ. είναι ίσες, σχήμα 6.1. Η συνθήκη της ανοικοδομητικής συμβολής απαιτεί η γωνία πρόσπτωσης να είναι ίση με την γωνία εκτομής της δευτερογενούς ακτινοβολίας ή:

$$\theta = \theta' \tag{6.6}$$

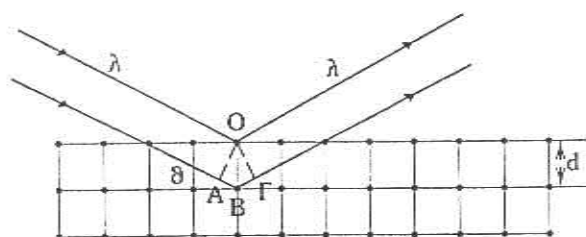
Προς τις άλλες διευθύνσεις έχουμε απόσβεση. Επειδή το φαινόμενο μοιάζει ποιοτικά με την ανάκλαση του φωτός σε μία λεία επιφάνεια, πολλές φορές μιλάμε για ανάκλαση των ακτίνων X.

Επειδή οι ακτίνες X εισχωρούν σε βάθος στον κρύσταλλο, τα ίδια συμβαίνουν και στα εσωτερικά δικτυωτά επίπεδα. Για να συμβάλλουν ανοικοδομητικά οι δευτερογενείς ακτινοβολίες από όλα τα δικτυωτά επίπεδα, πρέπει η διαφορά φάσης των δευτερογενών ακτινοβολιών από κάθε δικτυωτό επίπεδο να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π , ή η διαφορά πορείας των δεσμών $AB\Gamma$ να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος λ , σχήμα 6.2. Αν d είναι η απόσταση των δικτυωτών επιπέδων μεταξύ τους τότε η παραπάνω συνθήκη γράφεται:

$$2d \eta\mu\theta = n\lambda \tag{6.7}$$

όπου n είναι ένας ακέραιος αριθμός. Οι κροσσοί συμβολής που προκύπτουν για $n = 1$ λέγονται κροσσοί πρώτης τάξης, για $n = 2$ δευτέρας τάξης κ.ο.κ.. Η σχέση (6.7) είναι γνωστή σαν νόμος του Bragg.

Ο νόμος του Bragg προβλέπει ότι αν μία δέσμη ακτίνων X μήκους κύματος λ προσπέσει σε έναν κρύσταλλο θα υπάρξει ανοικοδομητική συμβολή μόνο σε μία καθορισμένη γωνία πρόσπτωσης για την οποία ισχύει η σχέση (6.7).



Σχήμα 6.2 Η δέσμη των ακτίνων X που σκεδάζεται κατά γωνία θ έχει μέγιστη ένταση όταν ισχύει ο νόμος του Bragg. Η απόσταση των δικτυωτών επιπέδων είναι d , το μήκος κύματος της ακτινοβολίας είναι λ και η γωνία $\text{AOG} = 2\theta$.

III. ΣΚΕΔΑΣΗ ΤΩΝ ΑΚΤΙΝΩΝ Χ ΑΠΟ ΛΕΠΤΗ ΣΚΟΝΗ

Όλα τα παραπάνω ισχύουν για την περίπτωση που έχουμε μόνο έναν κρύσταλλο ή, όπως έχει καθιερωθεί, όταν το δείγμα μας είναι μονοκρυσταλλικό. Τι γίνεται, όμως, όταν το δείγμα μας είναι λεπτή σκόνη (που σημαίνει πολλοί μονοκρύσταλλοι τυχαία προσανατολισμένοι);

Στην περίπτωση αυτή κάθε μονοκρύσταλλος συμπεριφέρεται όπως περιγράφηκε προηγουμένως. Επειδή, όμως, όλοι οι μονοκρύσταλλοι που ικανοποιούν τον νόμο του Bragg, δηλαδή σχηματίζουν την κατάλληλη γωνία θ ώστε να ικανοποιείται η σχέση (6.7) για το δεδομένο μήκος κύματος των ακτίνων X, βρίσκονται γύρω από την δέσμη των ακτίνων X, το αποτέλεσμα που παρατηρούμε αλλάζει. Αντί να έχουμε μία λεπτή δευτερογενή δέσμη, σαν αποτέλεσμα της συμβολής, έχουμε μία κωνική επιφάνεια. Η τομή της κωνικής επιφάνειας με ένα φθορίζον πέτασμα κάθετο στην διεύθυνση της προσπίπτουσας στο πέτασμα ακτινοβολίας θα είναι ένας κύκλος.

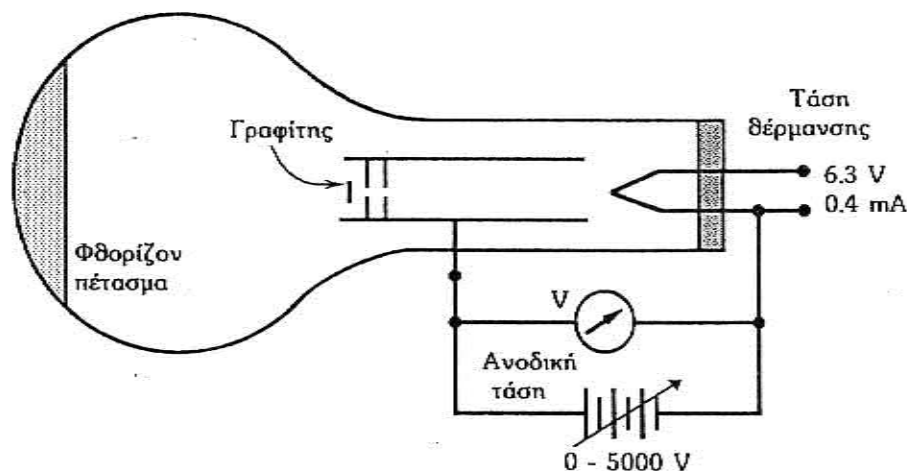
IV. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από έναν αερόκενο σωλήνα, τον σωλήνα περίθλασης, ένα τροφοδοτικό χαμηλής τάσης για την θέρμανση του νήματος και ένα τροφοδοτικό υψηλής τάσης για την επιτάχυνση των ηλεκτρονίων, σχήμα 6.3.

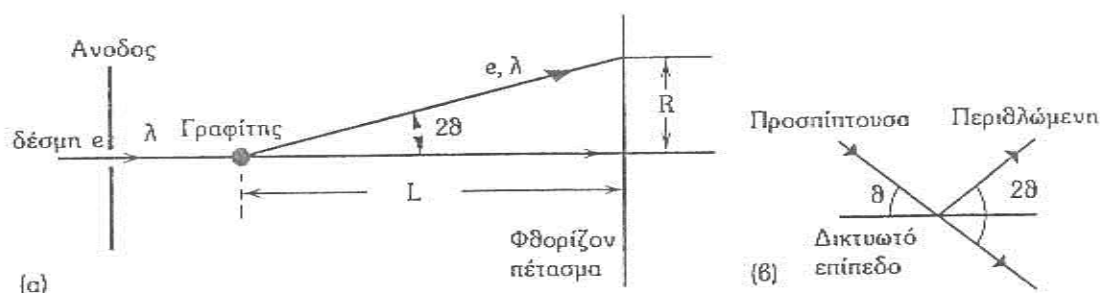
Ο σωλήνας περίθλασης περιέχει ένα κανόνι ηλεκτρονίων (θερμαινόμενο νήμα, διαφράγματα για να σχηματιστεί μία λεπτή δέσμη ηλεκτρονίων και την άνοδο). Η άνοδος έχει μία οπή στο κέντρο της από την οποία εξέρχεται η δέσμη των ηλεκτρονίων. Το υλικό στο οποίο θα γίνει η περίθλαση, αν τα ηλεκτρόνια έχουν και κυματική φύση, είναι λεπτή σκόνη γραφίτη. Ο γραφίτης είναι τοποθετημένος σε μία σακουλίτσα με λεπτά τοιχώματα και βρίσκεται στην οπή της ανόδου.

Απέναντι από την άνοδο υπάρχει ένα φθορίζον πέτασμα όπου παρατηρούμε τα αποτελέσματα της σκέδασης των ηλεκτρονίων από την λεπτή σκόνη του γραφίτη. Επειδή η δευτερογενής ακτινοβολία είναι κωνική, η τομή της στο φθορίζον πέτασμα είναι κύκλος ή δακτύλιος. Η απόσταση ανόδου – φθορίζοντος πετάσματος, για την συσκευή της άσκησης, είναι 13,5 cm.

Τα ηλεκτρόνια, σε αντίθεση με τις ακτίνες X, δεν είναι πολύ διεισδυτικά. Επιπλέον, αλληλεπιδρούν με την ύλη μέσα από την οποία διέρχονται με διαφορετικό τρόπο σε σχέση με τις ακτίνες X. Τα ηλεκτρόνια της δέσμης αλληλεπιδρούν με τα η-



Σχήμα 6.3 Η πειραματική διάταξη για την ανάδειξη της κυματικής φύσης των ηλεκτρονίων.



Σχήμα 6.4 α) Σχηματική παράσταση της δέσμης των ηλεκτρονίων στον σωλήνα περίθλασης. β) Λεπτομέρεια του σχήματος στην περιοχή του γραφίτη.

ηλεκτρόνια της ύλης μέσα από την οποία διέρχονται με δυνάμεις Coulomb και προσφέρουν σ' αυτά ένα μέρος της ενέργειάς τους. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η ενέργειά τους να μειώνεται, το μήκος κύματος να αυξάνεται, καθώς εισέρχονται όλο και πιο βαθιά στον κρύσταλλο. Όπως είναι γνωστό από την κυματική, δύο κύματα συμβάλλουν όταν έχουν το ίδιο μήκος κύματος. Έτσι, αναμένεται να υπάρχει συμβολή των δεσμών μόνο από τα δύο πρώτα δικτυωτά επίπεδα, ή ότι το n στην σχέση (6.7) να είναι ίσο με την μονάδα.

Στο σχήμα 6.4 παρουσιάζεται μιά σχηματική παράσταση της δέσμης των ηλεκτρονίων στον σωλήνα περίθλασης. Αν L είναι η απόσταση γραφίτη - φθορίζον πέτασμα, τότε ισχύει:

$$\epsilon\phi 2\theta = \frac{R}{L} \tag{6.8}$$

όπου R είναι η ακτίνα του δακτυλίου στο φθορίζον πέτασμα.

Αν η γωνία 2θ είναι μικρή τότε:

$$\epsilon\phi 2\theta \cong \eta\mu 2\theta \cong 2\theta \text{ (σε ακτίνια)} \tag{6.9}$$

Αν η γωνία 2θ είναι μικρή, κατά μείζονα λόγο και η γωνία θ είναι μικρή, οπότε η σχέση του Bragg, για $n = 1$, γίνεται:

$$2d\theta = \lambda \tag{6.10}$$

Από τις σχέσεις (6.8), (6.9) και (6.10) προκύπτει ότι:

$$R = \frac{L}{d} \lambda \tag{6.11}$$

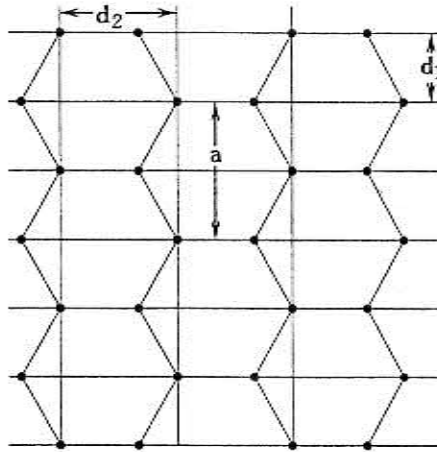
Αντικαθιστώντας την έκφραση του λ από την σχέση (6.4), προκύπτει ότι:

$$D = 2R = \frac{2Lh}{d} \frac{1}{\sqrt{2em}} \frac{1}{\sqrt{V}} \tag{6.12}$$

Αν λοιπόν τα ηλεκτρόνια έχουν και κυματική φύση, η διάμετρος του δακτυλίου στο φθορίζον πέτασμα είναι ανάλογη του αντίστροφου της τετραγωνικής ρίζας της τάσης επιτάχυνσης.

A. Η κρυσταλλική κυψελίδα του γραφίτη

Η κρυσταλλική κυψελίδα του γραφίτη είναι ένα εξαγωνικό πρίσμα με βάση ένα κανονικό εξάγωνό. Οι σταθερές του πλέγματος είναι $a = 2,4562 \pm 0,0001 \text{ \AA}$ (a είναι η μικρή διαγώνιος του κανονικού εξάγωνου, σχήμα 6.5) και $c = 6,6943 \pm 0,0007$



Σχήμα 6.5 Ένα επίπεδο με άτομα γραφίτη. Είναι φανερό ότι αναμένουμε δύο τουλάχιστον ομάδες παράλληλων επιπέδων.

Å (c είναι το ύψος του πρίσματος). Τα άτομα του γραφίτη βρίσκονται στις κορυφές του πρίσματος. Πολύ εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι η πλευρά του κανονικού εξάγωνου είναι ίση με $1,4181 \pm 0,0001$ Å. Λόγω αυτής της δομής του γραφίτη, στην άσκηση δεν μπορούμε να παρατηρήσουμε φαινόμενα περίθλασης από τα δικτυωτά επίπεδα των οποίων η απόσταση είναι της τάξης μεγέθους της c.

Από το σχήμα 6.5 προκύπτει πολύ εύκολα ότι αναμένουμε δύο ομάδες δικτυωτών επιπέδων με αποστάσεις $d_1 = 1,2281 \pm 0,0001$ Å και $d_2 = 2,1271 \pm 0,0001$ Å.

V. ΟΡΓΑΝΑ

1. Σωλήνας περίθλασης.
2. Τροφοδοτικό χαμηλής τάσης (6,3 volts ac)
3. Τροφοδοτικό υψηλής τάσης 0 – 5000 (0 – 10000) volts dc.
4. Βολτόμετρο 0 – 5000 (0 – 10000) volts.
5. Καλώδια σύνδεσης

Τα 2, 3 και 4 περικλείονται σε κοινό περίβλημα.

VI. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

1. Αναγνωρίστε τις συσκευές.
2. Πραγματοποιήστε το κύκλωμα του σχήματος 6.3.
3. Μετά τον έλεγχο της συνδεσμολογίας θέσατε τις συσκευές υπό τάση.
4. Ρυθμίστε την υψηλή τάση στην μέγιστη τιμή της (5 ή 10 kV ανάλογα με την συσκευή).

ΠΡΟΣΟΧΗ

Η υψηλή τάση δεν πρέπει να υπερβεί την τιμή των 5 kV, στην συσκευή με τα 5 kV, γιατί υπάρχει κίνδυνος υπερθέρμανσης του γραφίτη και στην συνέχεια εξάχνωσής του.

5. Παρατηρήστε την εικόνα στο φθορίζον πέτασμα. Πόσους δακτυλίους παρατηρείτε; Τι συμπέρασμα βγάζετε;
6. Μετρήστε την διάμετρο των δακτυλίων.

7. Επαναλάβετε το βήμα 6 μειώνοντας την υψηλή τάση κατά 200 ή 400 V, ανάλογα με την μέγιστη τάση της διάταξης, μέχρι περίπου τα 2000 V.
8. Με την βοήθεια των μετρήσεών σας μπορείτε να αποδείξετε ότι τα ηλεκτρόνια έχουν και κυματική φύση;
9. Ποιά σφάλματα υπεισέρχονται στις μετρήσεις σας; Εκτιμήστε τα σφάλματα αυτά. Ποιά η αιτία τους;
10. Με την βοήθεια των ελαχίστων τετραγώνων υπολογίστε τις καλύτερες ευθείες που διέρχονται από τα πειραματικά σας δεδομένα.
11. Από την κλίση των ευθειών υπολογίστε τις σταθερές του πλέγματος του γραφίτη θεωρώντας γνωστή την τιμή της σταθεράς του Planck.
12. Θεωρώντας γνωστές τις σταθερές του πλέγματος του γραφίτη υπολογίστε την τιμή της σταθεράς του Planck.
13. Σχόλια, συμπεράσματα.